

Contents lists available at [SciVerse ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Représentations modulo p d'un sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ Modulo p representations of a Borel subgroup of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$

Mathieu Vienney

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 26 mars 2012

Accepté après révision le 19 juillet 2012

Disponible sur Internet le xxxx

Présenté par Jean-Marc Fontaine

R É S U M É

Nous prouvons que si k est un corps fini de caractéristique p , alors une représentation k -linéaire lisse irréductible à caractère central d'un sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ est soit de dimension finie, soit isomorphe à l'image d'une représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ par le foncteur $V \mapsto \mathbf{D}(V)^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ de Colmez.

© 2012 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

A B S T R A C T

We prove that every smooth irreducible representation of a Borel subgroup of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ admitting a central character, with coefficients in a finite field of characteristic p is either finite-dimensional or isomorphic to the image of a Galois representation via Colmez's functor $V \mapsto \mathbf{D}(V)^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

© 2012 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Suivant la philosophie de la correspondance de Langlands modulo p de Breuil [2], Colmez [3] a construit une bijection entre certaines représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et certaines représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. En particulier, cette bijection repose sur l'équivalence de Fontaine [5] entre représentations p -adiques et (φ, Γ) -modules, ainsi que sur une construction permettant d'associer à un (φ, Γ) -module irréductible une représentation irréductible d'un sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. Schneider et Vignéras [6] ont proposé dans un cadre plus général une construction réciproque, permettant d'associer à une représentation irréductible d'un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif p -adique un « (φ, Γ) -module généralisé », ne vérifiant pas nécessairement d'hypothèse de finitude.

Nous montrons ici comment utiliser les travaux d'Emerton [4] afin d'obtenir la condition de finitude manquante dans le cas d'un sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$.

1. Notations

Soit p un nombre premier et k un corps de caractéristique p . Soit B le sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures, $K = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^\times & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p^\times \end{pmatrix}$ l'intersection de B et de $GL_2(\mathbf{Z}_p)$, $Z = \mathbf{Q}_p^\times \cdot \text{Id}$ le centre de B et $N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note P^+ le sous-monoïde $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^{-\{0\}} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de B , et $P^- = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & \mathbf{Z}_p^{-\{0\}} \end{pmatrix}$.

Adresse e-mail : mathieu.vienney@ens-lyon.fr.1631-073X/\$ – see front matter © 2012 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.07.007>Please cite this article in press as: M. Vienney, Représentations modulo p d'un sous-groupe de Borel de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.07.007>

2. (φ, Γ) -modules, (ψ, Γ) -modules et représentations de B

Soit $k((\pi))$ le corps des séries de Laurent à une indéterminée à coefficients dans k , et $\varphi : k((\pi)) \rightarrow k((\pi))$ le morphisme qui à $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \pi^n$ associe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \pi^{pn}$. Considérons aussi l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ sur $k((\pi))$ donnée par $a \cdot \pi = (1 + \pi)^a - 1$. Dans l'esprit des (φ, Γ) -modules de Fontaine, nous définissons alors les (φ, Γ) -modules sur $k((\pi))$:

Définition 2.1. On appelle (φ, Γ) -module sur $k((\pi))$ un espace vectoriel D de dimension finie sur $k((\pi))$, muni d'une application $\varphi : D \rightarrow D$ semi-linéaire, telle que $\text{Im}(\varphi)$ contienne une base de D , et d'une action semi-linéaire de Γ commutant à φ .

On construit un inverse à gauche de φ de la manière suivante : tout élément $x \in D$ peut s'écrire de manière unique $\sum_{i=0}^{p-1} (1 + \pi)^i \varphi(x_i)$, avec $x_i \in D$, et on pose alors :

$$\psi_D \left(\sum_{i=0}^{p-1} (1 + \pi)^i \varphi(x_i) \right) = x_0.$$

D^\natural est défini comme étant le plus petit $k[[\pi]]$ -réseau de D qui soit stable par ψ_D , et tel que $\psi_D : D^\natural \rightarrow D^\natural$ soit surjectif. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2.2. On appelle (ψ, Γ) -module un $k[[\pi]]$ -module M de type fini, muni d'un opérateur $\psi : M \rightarrow M$, k -linéaire, vérifiant $\psi(\lambda(\pi^p)x) = \lambda(\pi)\psi(x)$, pour tous $\lambda \in k[[\pi]]$ et $x \in M$; ainsi que d'une action semi-linéaire de $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$, commutant à ψ . On dit alors que M est :

- surjectif si $\psi : M \rightarrow M$ est surjectif,
- non-dégénéré si $\text{Ker } \psi$ ne contient pas de sous- $k[[\pi]]$ -module non-nul,
- irréductible si les seuls sous- (ψ, Γ) -modules de M sont M et 0 .

Notons qu'un (ψ, Γ) -module irréductible qui n'est pas de torsion est toujours libre sur $k[[\pi]]$, surjectif et non-dégénéré. De plus, sous certaines conditions, il est possible de retrouver une structure de (φ, Γ) -module, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.3. Soit M un (ψ, Γ) -module libre de type fini sur $k[[\pi]]$, surjectif et non-dégénéré. Alors il existe une unique structure de (φ, Γ) -module sur $D = M \otimes_{k[[\pi]]} k((\pi))$ telle que $\psi = \psi_D$. De plus, si M est irréductible, alors $M = D^\natural$.

Si D est un (φ, Γ) -module, alors le réseau D^\natural de D introduit par Colmez est un (ψ, Γ) -module. En particulier, si D est un (φ, Γ) -module irréductible, alors D^\natural est un (ψ, Γ) -module irréductible de rang égal à la dimension de D , de sorte qu'il existe des (ψ, Γ) -modules irréductibles de rang arbitrairement grand.

La construction de Colmez permet d'associer à un caractère lisse χ de \mathbb{Q}_p^\times et un (ψ, Γ) -module irréductible M une représentation de B notée $\Omega_\chi(M)$, lisse irréductible et de caractère central χ . Pour cela, on munit le k -espace vectoriel $\varprojlim_{\psi_D} M$ d'une action continue de B en utilisant la structure de $k[[\pi]]$ -module de M , l'action de Γ ainsi que celle de ψ_D .

La représentation $\Omega_\chi(M)$ est alors définie par

$$\Omega_\chi(M) = (\varprojlim_{\psi} M)^* = \text{Hom}_{\text{cont}}(\varprojlim_{\psi} M, k).$$

Dans la suite, nous prouvons que toute représentation lisse irréductible de B, à caractère central et de dimension infinie est de cette forme. Pour cela nous prouvons le résultat suivant :

Proposition 2.4. Soit Π une représentation k -linéaire, lisse, irréductible de B, admettant un caractère central χ , et soit M un (ψ, Γ) -module libre tel qu'il existe un morphisme non nul B-équivariant $\Pi^* \rightarrow \varprojlim_{\psi} M$. Alors :

- soit Π est de dimension finie,
- soit il existe un sous-quotient M_0 de M , irréductible en tant que (ψ, Γ) -module tel que $\Pi \simeq \Omega_\chi(M_0)$.

La difficulté est alors de construire un (ψ, Γ) -module M vérifiant les propriétés de l'énoncé.

3. Dualité de Pontryagin et lemme de Nakayama

Le foncteur qui à un k -espace vectoriel associe son dual, induit une anti-équivalence entre la catégorie des k -espaces vectoriels discrets et celle des k -espaces vectoriels linéairement compacts, c'est-à-dire des k -espaces vectoriels topologiques qui sont limites projectives de k -espaces vectoriels de dimension finie munis de la topologie discrète. Cette dualité s'étend en une dualité entre les représentations k -linéaires lisses d'un groupe localement profini G et les représentations de G sur des k -espaces vectoriels linéairement compacts. De plus, elle préserve les représentations topologiquement irréductibles.

Enfin, on peut prouver que si V est une représentation lisse de B , alors le dual de l'espace V^{N_0} des N_0 -invariants est formé des N_0 -coinvariants du dual, c'est-à-dire $(V^{N_0})^* = (V^*)_{N_0} := V^*/V^*(N_0)$ où $V^*(N_0)$ est le sous-espace vectoriel de V^* engendré par les $n \cdot f - f$, $n \in N_0$, $f \in V^*$.

Si V est une représentation linéairement compacte ou lisse de N_0 , alors on peut la munir de manière canonique d'une structure de module sur son algèbre d'Iwasawa $k[[N_0]]$. Or, $k[[N_0]] \simeq k[[\pi]]$, l'isomorphisme faisant correspondre $(1 + \pi)$ à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous disposons alors d'un « lemme de Nakayama » topologique :

Proposition 3.1. *Si V est un $k[[\pi]]$ -module topologique, alors V est de type fini si et seulement si $V/\pi V$ est un k -espace vectoriel de dimension finie.*

4. Représentations irréductibles du Borel

Soit Π une représentation k -linéaire lisse de B , irréductible, admettant un caractère central. Berger a montré dans [1] qu'il existait deux caractères lisses σ_1, σ_2 de \mathbf{Q}_p^\times , que l'on peut choisir de sorte que $\sigma_2(p) = 1$, tels que Π soit un quotient de l'induite compacte $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$, où $\sigma := \sigma_1 \otimes \sigma_2$ est le caractère de KZ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ associe $\sigma_1(a)\sigma_2(d)$. Soit donc R la sous-représentation de $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$ telle que

$$0 \rightarrow R \rightarrow \text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma \rightarrow \Pi \rightarrow 0.$$

À tout élément $b \in B$ est associé un élément $[b]$ de $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$, et ces éléments engendrent $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$. Soit $(\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+$ le sous-espace vectoriel de $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$ engendré par les $[g]$, $g \in P^+$, $R^+ = (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+ \cap R$, et Π^+ l'image dans Π des éléments de $(\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+$. Alors Π^+ est stable sous l'action de P^+Z , et en tant que représentation de P^+Z , est isomorphe à $(\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+/R^+$.

Proposition 4.1. *Si Π est un quotient de $\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma$, sans quotient isomorphe à σ , alors $\Pi^+/\pi \Pi^+$ est un k -espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. Comme Π^+ est muni d'une action de N_0 , c'est naturellement un $k[[\pi]]$ -module. Suivant Emerton [4], si on note $k[[\pi]]\{\phi\}$ l'anneau des polynômes non commutatifs en ϕ , Π^+ est même un $k[[\pi]]\{\phi\}$ -module, l'action de ϕ correspondant à celle de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La proposition 3.5 de [4] prouve que l'ensemble $(\Pi^+)^{\pi=0}$ des éléments de Π^+ annulés par π forme un k -espace vectoriel de dimension finie si et seulement si $\Pi^+/\pi \Pi^+$ est lui-même un k -espace vectoriel de dimension finie. De la suite exacte courte de $k[[\pi]]\{\phi\}$ -modules

$$0 \rightarrow R^+ \rightarrow (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+ \rightarrow \Pi^+ \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte de $k\{\phi\}$ -modules

$$R/\pi R^+ \rightarrow (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+/\pi (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+ \rightarrow \Pi^+/\pi \Pi^+ \rightarrow 0,$$

où l'on peut prouver par un calcul explicite que $(\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+/\pi (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+$ est isomorphe à $k\{\phi\}$. Un autre calcul permet de prouver que si Π n'a pas de quotient isomorphe à σ , alors l'image de πR^+ par la projection canonique n'est pas incluse dans $\pi (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+$, et donc que $\Pi^+/\pi \Pi^+$ est un quotient strict de $(\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+/\pi (\text{ind}_{\text{KZ}}^B \sigma)^+ = k\{\phi\}$, et donc de dimension finie sur k . \square

Puisque l'action de $(1 + \pi)$ correspond à celle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(\Pi^+)^{\pi=0}$ est formé des éléments stables sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc est l'ensemble $(\Pi^+)^{N_0}$ des N_0 -invariants.

Le dual de Π^+ est alors muni d'une action de $(P^+Z)^{-1} = P^-Z$. Puisque $(\Pi^+)^{N_0}$ est de dimension finie sur k , il en est de même de son dual $((\Pi^+)^*)_{N_0}$. Or, ces coinvariants sont exactement le quotient $(\Pi^+)^*/\pi (\Pi^+)^*$, en tant que $k[[\pi]]$ -module. Par le lemme de Nakayama topologique, on en déduit que $(\Pi^+)^*$ est un $k[[\pi]]$ -module de type fini.

De plus, l'action de P^- permet de définir une structure de (ψ, Γ) -module sur $(\Pi^+)^*$ en posant

$$\psi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot v \quad \text{et} \quad a \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot v \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^\times.$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une structure de (ψ, Γ) -module.

Par construction, on dispose d'un morphisme B-équivariant non nul $V^* \rightarrow \varprojlim_{\psi} (\Pi^+)^*$.

Il est alors possible d'utiliser la proposition 2.4 en prenant Π^+ comme (ψ, Γ) -module, puis en utilisant la proposition 2.3, d'en déduire un (φ, Γ) -module, et donc d'en déduire le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit Π une représentation k -linéaire, lisse, irréductible de B , admettant un caractère central χ . Alors :*

- soit Π est de dimension finie,
- soit il existe un (φ, Γ) -module irréductible D , unique à isomorphisme près, tel que

$$\Pi \simeq \Omega_{\chi}(D^{\natural}).$$

Remarque 4.3. Dans le cas où k est fini, on peut, si Π est de dimension infinie, lui associer la représentation k -linéaire de dimension finie de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ attachée à D par l'équivalence de catégories de Fontaine [5] entre (φ, Γ) -modules étales et représentations de $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Laurent Berger. Les résultats exposés ici sont une partie de ma thèse menée sous sa direction.

Références

- [1] L. Berger, On some modular representations of the Borel subgroup of $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Compos. Math.* 146 (1) (2010) 58–80.
- [2] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* 2 (1) (2003) 23–58 (in French, with French summary).
- [3] P. Colmez, (φ, Γ) -modules et représentations du mirabolique de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* 330 (2010) 61–153.
- [4] M. Emerton, On a class of coherent rings, with applications to the smooth representation theory of $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ in characteristic p , 2008, Prépublication.
- [5] J.-M. Fontaine, Représentations p -adiques des corps locaux. I, in : *The Grothendieck Festschrift*, vol. II, in : *Progr. Math.*, vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 249–309 (in French).
- [6] P. Schneider, M.-F. Vignéras, A functor from smooth \mathfrak{o} -torsion representations to (φ, Γ) -modules, 2008, Prépublication.