

# Compte-rendu intermédiaire T0+6

---

## Projet ANR-09-JCJC-0048-01

### Calculs effectifs en théorie de Hodge $p$ -adique

Programme Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs 2009

#### Table des matières

<b>1</b>	<b>Identification</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Démarrage du projet</b>	<b>1</b>
2.1	Réunion de mise en route . . . . .	1
2.2	Objectifs scientifiques du projet CETHop . . . . .	2
2.3	La forme et la diffusion des résultats . . . . .	2
2.4	Les moyens de travailler ensemble . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Annexe : un point sur le budget</b>	<b>3</b>

---

## 1 Identification

Acronyme du projet . . . . .	CETHop
Titre du projet . . . . .	Calculs effectifs en théorie de Hodge $p$ -adique
Coordinateur du projet . . . . .	Xavier Caruso
Date de début du projet . . . . .	1 septembre 2009
Date de fin du projet . . . . .	31 août 2013
Site web du projet . . . . .	<a href="http://cethop.math.cnrs.fr">http://cethop.math.cnrs.fr</a>
Rédacteur de ce rapport . . . . .	Xavier Caruso ( <a href="mailto:xavier.caruso@normalesup.org">xavier.caruso@normalesup.org</a> )
Date de rédaction . . . . .	9 avril 2010

## 2 Démarrage du projet

### 2.1 Réunion de mise en route

Afin de fixer précisément les orientations de notre projet, nous avons organisé une réunion de mise en route à l'IRMAR à Rennes (qui est le laboratoire de rattachement du projet CETHop) du 14 au 16 décembre 2009. Y ont participé tous les membres de l'ANR à l'exception de Matthieu Vienney. Nous avons également invité Ariane Mézard qui travaille sur des sujets très proches de nos préoccupations. Plusieurs chercheurs et enseignants chercheurs rennais (extérieurs à l'ANR) ont également assisté à certains exposés. Voici la liste des exposés qui ont été donnés.

- Laurent Berger, *Un algorithme pour calculer la réduction modulo  $p$  d'une représentation cristalline de dimension 2*
- Jérémy Le Borgne, *Vers un algorithme pour la réduction des  $\phi$ -modules sur  $k((u))$*
- Xavier Caruso, *Opérateur de monodromie sur les modules de Breuil*
- Christine Huyghe, *Questions autour de calculs explicites de la cohomologie de de Rham des courbes*

- David Lubicz, *Construction de réseaux fortement divisibles : l’algorithme de Laffaille*
- Adriano Marmora, *Une question sur l’irrégularité  $p$ -adique*
- Ariane Mézard, *Autour des représentations cristallines*
- Andrea Pulita, *Quelques invariants différentiels des représentations  $p$ -adiques*

## 2.2 Objectifs scientifiques du projet CETHop

Au vu des exposés, nous avons décidé de nous concentrer sur l’étude d’un certain nombre d’objets dont voici la liste.

- équations différentielles  $p$ -adiques
- $D$ -modules arithmétiques
- modules filtrés à la Fontaine
- $(\varphi, \Gamma)$ -modules
- modules de Breuil, et de Breuil-Kisin
- modules de Wach
- Courbes hyperelliptiques
- Représentations du côté  $GL_2$

Pour chacun de ces objets (et lorsque cela n’existe pas déjà), nous projetons d’écrire un *package* permettant de les manipuler simplement et efficacement sur machine. Nous projetons également d’implémenter des fonctions de traduction entre ces objets lorsque cela s’avère approprié.

Nous avons déjà commencé à travailler dans cette direction aussi bien d’un point de vue théorique que pratique, en particulier en ce qui concerne les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et les modules de Breuil-Kisin. S’appuyant sur les premiers, Laurent Berger a déjà proposé un algorithme pour calculer la semi-simplifiée modulo  $p$  d’une représentation cristalline de dimension 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ . Jérémy Le Borgne, quant à lui, a déjà obtenu certains résultats sur les modules de Breuil-Kisin en caractéristique  $p$  : il a proposé un algorithme pour calculer les poids de l’inertie modérée associé à un tel module et est en train de le programmer. D’autres projets sont en cours, mais pour l’instant pas encore aboutis.

Les difficultés rencontrées — et aussi attendues pour les recherches à venir — sont relativement classiques dans ce domaine ; elles consistent à déterminer, pour chacun des problèmes qui nous intéresse, quelle est la précision optimale à laquelle il faut tronquer les diverses séries que l’on doit manipuler. La précision doit être suffisante pour s’assurer que le résultat trouvé est le bon, mais ne doit par ailleurs pas être trop grande afin de ne pas faire exploser la complexité des algorithmes.

## 2.3 La forme et la diffusion des résultats

Notre principal moyen de diffusion reste bien sûr la publication dans des revues spécialisées, internationales avec comité de lecture. Nous disposons également d’une page web

<http://cethop.math.cnrs.fr/>

sur laquelle on pourra trouver :

- la liste des publications des membres du projet, ainsi que les version pdf des prépublications ;
- les codes source (en magma et/ou SAGE) des algorithmes que nous implémenterons ;
- une interface (NoteBook de SAGE) permettant d’interroger directement en ligne les algorithmes que nous aurons programmés ;
- toute information utile liée à CETHop (séminaires organisés par le projet, notamment)

Afin de faciliter la communication (entre nous et avec l’extérieur), un forum de discussion est également disponible sur notre page web.

Enfin, le projet CETHop s’impliquera dans l’organisation d’un certain nombre de séminaires *via* lesquels nous pourrons diffuser nos travaux. Voici ce qui est prévu pour l’instant :

- colloque à Moscou *Arithmétique et algorithmique* en mai 2010 (voir <http://www.mccme.ru/lifr/zykin/fr/algoarithm.html>)
- séminaire de mi-parcours prévu à Lyon pour juin 2011
- séminaire de clôture prévu à Luminy pour juin 2013

## 2.4 Les moyens de travailler ensemble

Nous avons choisi d'adopter deux solutions informatiques classiques :

- un forum de discussion hébergé sur notre page web ; celui-ci comprend une partie privée qui pourra nous servir de moyen de communication interne efficace ;
- un serveur *Subversion* (svn) ; il s'agit d'un outil classique servant à faciliter l'écriture d'articles ou le développement de logiciels en collaboration

Nous prévoyons également d'organiser, au cours des quatre années du projet, d'autres rencontres entre les membres du projet. Les deux prochaines sont déjà plus ou moins planifiées :

- une séance de TP sur magma et/ou SAGE à Strasbourg au moins de juin 2010
- une rencontre à la suite le séminaire de mi-parcours

## 3 Annexe : un point sur le budget

Voici la liste des dépenses déjà engagées :

- Décharge d'enseignement pour Adriano Marmora ( $\sim 4500$  euros)
- Organisation de la réunion de mise en route ( $\sim 3000$  euros)
- Frais de mission divers<sup>1</sup> ( $\sim 2500$  euros)

Et voici la liste des principales dépenses prévues pour l'année à venir :

- Invitation de Abe à Rennes et Strasbourg (budget à établir)
- Participation à l'organisation du séminaire *Arithmétique et algorithmique* à Moscou en mai 2010 ( $\sim 1000$  euros)
- Organisation d'une séance de TP à Strasbourg en septembre 2010 ( $\sim 2000$  euros)
- Achat d'un serveur de calcul ( $\sim 2000$  euros)

---

<sup>1</sup>En grande partie, déplacement et hébergement des membres du projet pour le trimestre galoisien à l'IHP et la conférence en l'honneur de Jean-Marc Fontaine qui le clôturait.