

# COMPTE-RENDU INTERMÉDIAIRE

---

## Projet ANR-09-JCJC-0048-01

### Calculs effectifs en théorie de Hodge $p$ -adique

Programme Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs 2009

#### Table des matières

<b>1</b>	<b>Identification</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Livrables et jalons</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Rapport d'avancement sur la période concernée</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Impact du projet depuis le début</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Annexes éventuelles</b>	<b>5</b>

---

#### 1 Identification

Acronyme du projet .....	CETHop
Titre du projet .....	Calculs effectifs en théorie de Hodge $p$ -adique
Coordinateur du projet .....	Xavier Caruso
Date de début du projet .....	1 septembre 2009
Date de fin du projet .....	31 août 2013
Site web du projet .....	<a href="http://cethop.math.cnrs.fr/">http://cethop.math.cnrs.fr/</a>
Rédacteur de ce rapprt .....	Xavier Caruso Université Rennes 1 — IRMAR Campus de Beaulieu 35042 Rennes Cedex Tél : 02 23 23 58 92 E-mail : <a href="mailto:xavier.caruso@normalesup.org">xavier.caruso@normalesup.org</a>
Date de rédaction .....	3 août 2011
Période faisant l'objet du rapport d'activité .....	01/09/2009 – 30/06/2011

## 2 Livrables et jalons

Le projet ne comporte ni livrable, ni jalon.

## 3 Rapport d'avancement sur la période concernée

### 3.1 Description des travaux effectués

Sur le plan scientifique, plusieurs thèmes ont été abordés dans le cadre du projet CE-THop pour la période considérée.

Conformément à nos projets, une première question qui a été considérée est celle du calcul de la semi-simplifiée modulo  $p$  des représentations cristallines (voire semi-stables). Il s'agit d'une question importante pour de nombreuses applications, mais pour laquelle on ne dispose que de maigres résultats partiels laissant présager un comportement chaotique, en tout cas difficile à maîtriser.

Dans un premier article, Laurent Berger s'est intéressé au cas de la dimension 2. Il a montré plusieurs propriétés de continuité et a décrit un algorithme, reposant sur l'utilisation des modules de Wach, permettant de déterminer la semi-simplifiée modulo  $p$  d'une telle représentation donnée par son  $\varphi$ -module filtré. Cet algorithme n'a toutefois pas encore été implémenté.

Dans un travail en préparation, Xavier Caruso et David Lubicz ont obtenu un autre algorithme (probablement plus efficace) pour répondre à la même question dans le cas plus général des représentations semi-stables de dimension quelconque. Celui-ci repose en particulier sur la mise au point d'outils efficaces pour la manipulation sur machine des modules sans torsion de type fini sur des anneaux du type  $\mathbb{Z}_p[[u]]$ . Il est clair que ces outils ont un intérêt qui va bien au delà de l'application au calcul de la semi-simplifiée des représentations semi-stables, et même au delà de la théorie de Hodge  $p$ -adique (ils pourraient, par exemple, être également utiles en théorie d'Iwasawa). L'implantation de tous ces algorithmes en MAGMA est en cours.

Dans le cadre de sa thèse, Jérémy Le Borgne a étudié l'algorithmique des  $\varphi$ -modules sur les corps finis, ainsi que sur les corps de séries de Laurent à coefficients dans un corps fini. Il résulte de son travail

- une meilleure compréhension (aussi bien d'un point de vue théorique qu'algorithmique) de la factorisation des polynômes non commutatifs sur les corps finis ; Jérémy Le Borgne obtient par exemple un algorithme polynomial permettant de compter le nombre de telles factorisations ;
- un algorithme polynomial calculant les poids de l'inertie modérée de la représentation galoisienne associée à un module de Kisin annulé par  $p$ .

L'implantation de tous ces algorithmes en MAGMA est en cours.

Sur un plan plus théorique, Xavier Caruso a mis au point la théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules, et a utilisé celle-ci pour donner une nouvelle caractérisation des représentations semi-stables. Un corollaire de son résultat est un critère permettant de reconnaître le caractère semi-stable d'une représentation de  $G_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  uniquement à sa restriction au sous-groupe  $G_\infty = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{p}))$ . Les  $(\varphi, \tau)$ -modules pourraient être également le

bon cadre théorique pour l'étude (aussi bien théorique qu'algorithmique) des questions de prolongement de l'action de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  à  $G_\infty$ .

Xavier Caruso a également entamé l'étude des variétés de Kisin associées à des représentations de dimension  $> 2$  : il a obtenu une estimation de leurs dimensions dans le cas de la représentation triviale, et émis une série de conjectures prédisant des extensions de son résultat à des cas beaucoup plus généraux. L'outil informatique pourrait être envisagé pour tester la validité de ces conjectures.

Enfin, soit  $X$  une courbe propre et lisse sur un corps fini de caractéristique  $p$ . En 1987, Laumon prouva une formule, conjecturée par Deligne, qui exprime la constante de l'équation fonctionnelle de la fonction  $L$  d'un faisceau  $\ell$ -adique sur  $X$ , pour  $\ell$  premier différent de  $p$ , comme produit de facteurs locaux (facteurs epsilon) aux points fermés de  $X$ . Dans un travail en collaboration, Tomoyuki Abe et Adriano Marmora ont prouvé l'analogie de cette formule en cohomologie rigide. Ce travail a pu voir le jour grâce à une invitation en France de trois semaines de Tomoyuki Abe financée par l'ANR.

Par ailleurs, les membres du projet ont organisé en juin 2011 une conférence internationale de quatre jours à l'ENS de Lyon. Elle a réuni une soixantaine de participants de tous âges et a été l'occasion pour plusieurs des membres du projet de présenter leurs travaux.

## 3.2 Résultats marquants

Développement de la théorie des  $(\varphi, \tau)$ -modules.

Obtention d'un premier algorithme pour calculer la semi-simplifiée modulo  $p$  d'une représentation cristalline de dimension 2.

## 3.3 Réunions du consortium

Pas de consortium

## 3.4 Commentaires libres

# 4 Impact du projet depuis le début

## 4.1 Liste des publications et communications

### Publications et prépublications

Plusieurs articles ont déjà été écrits dans le cadre du projet CETHop :

- [1] T. Abe, A. Marmora, *Product formula for  $p$ -adic epsilon factors*, 77 pages
- [2] L. Berger, *Local constancy for the reduction mod  $p$  of 2-dimensional crystalline representations*, 11 pages
- [3] X. Caruso, *Dimensions de certaines variétés de Kisin*, 55 pages
- [4] X. Caruso *Représentations galoisiennes  $p$ -adiques et  $(\varphi, \tau)$ -modules*, 44 pages

[5] J. Le Borgne, *Semi-characteristic polynomials,  $\varphi$ -modules and skew polynomials*, 26 pages

Tous ces articles sont disponibles sur le site web du projet, et ont été soumis pour publication dans des revues internationales.

### **Exposés dans des conférences ou des séminaires (passés et à venir)**

L. Berger, *Computing the reduction mod  $p$  of some crystalline representations*, Warwick (Angleterre), septembre 2009

L. Berger, *Le calcul de la réduction modulo  $p$  de certaines représentations cristallines*, Clermont Ferrand, décembre 2009

L. Berger, *La correspondance de Langlands locale  $p$ -adique pour  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , séminaire Bourbaki, Paris, mars 2010

L. Berger, *Computing the reduction of some  $p$ -adic representations*, Oxford (Angleterre), mars 2010

X. Caruso, *Dimensions of Kisin varieties I*, Bonn (Allemagne), avril 2010

X. Caruso, *Dimensions of Kisin varieties II*, Bonn (Allemagne), avril 2010

X. Caruso, *Effective computations in  $p$ -adic Hodge theory*, Moscou (Russie), juin 2010

J. Le Borgne, *Algorithmic problems for reduction of  $\varphi$ -modules*, Moscou (Russie), juin 2010

A. Pulita, *Radius of convergence function of  $p$ -adic differential equations*, Strasbourg, novembre 2010

L. Berger, *Réduction modulo  $p$  de certaines représentations cristallines*, Bordeaux, décembre 2010

X. Caruso, *Représentations galoisiennes et  $(\varphi, \tau)$ -modules*, Versailles, mai 2011

M. Gros, *Correspondance de Simpson  $p$ -adique*, Caen, juin 2011

X. Caruso, *Une contribution à la théorie de Hodge  $p$ -adique entière et de torsion*, soutenance d'habilitation, Rennes, juin 2011

J. Le Borgne, *Algorithms for  $\varphi$ -modules in characteristic  $p$  and Galois representations*, Lyon, juin 2011

D. Lubicz, *Algèbre linéaire sur  $W[[u]]$  et application au calcul de réseaux dans les représentations galoisiennes*, Lyon, juin 2011

A. Marmora, *Sur la formule du produit pour les facteurs epsilon  $p$ -adiques*, Lyon, juin 2011

X. Caruso, *Linear Algebra over  $\mathbb{Z}_p[[u]]$* , Bastia, juin 2011

A. Marmora, *Product formula for  $p$ -adic epsilon factors*, Tianjin (Chine), juillet 2011

X. Caruso, *An algorithm to compute lattices in semi-stable representations*, Heidelberg (Allemagne), septembre 2011

A. Marmora, *Autour des transformations de Fourier*, Luminy, septembre 2011

## **4.2 Liste des éléments de valorisation**

Des librairies MAGMA et SAGE reprenant les algorithmes développés lors du projet sont en cours d'écriture. Elles seront disponibles bientôt sur le site web du projet.

## **4.3 Personnels recrutés en CDD**

Aucun personnel recruté dans le cadre du projet

## **4.4 État financier**

Les principales dépenses réalisées dans le cadre du projet sont :

- Organisation d'une conférence à Lyon : ~ 20 000 €
- Décharges d'enseignements pour A. Marmora et L. Berger : ~ 6 000 €
- Invitation de Tomoyuki Abe à Rennes puis Strasbourg : ~ 5 000 €
- Frais de missions divers : ~ 3 000 €
- Organisation de la réunion de mise en route à Rennes : ~ 3 000 €
- Organisation d'une séance de TP à Strasbourg : ~ 2 000 €
- Invitation de David Roe à Rennes : ~ 1 000 €

Cela représente un total d'environ 40 000 €, c'est-à-dire 40% du budget.

## **5 Annexes éventuelles**