Une neutralisation explicite de l'algèbre de Weyl quantique complétée

Michel Gros* et Bernard Le Stum†
IRMAR, UMR CNRS 6625
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France

17 avril 2012

Résumé. Soit p un nombre premier. Nous établissons l'existence de neutralisations de divers complétés de l'algèbre de Weyl quantique spécialisée en une racine de l'unité primitive d'ordre p (qui est "génériquement" une algèbre d'Azumaya) et donnons en particulier un énoncé de neutralisation explicite relevant celui construit en caractéristique p dans [3].

0 Introduction

Si X désigne un schéma lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, il est bien connu que le centre $Z\mathcal{D}_X^{(0)}$ de l'algèbre des opérateurs de niveau 0 (c'est-à-dire ceux "sans puissances divisées") $\mathcal{D}_X^{(0)}$ sur X est "gros" et que $\mathcal{D}_X^{(0)}$ est une algèbre d'Azumaya sur $Z\mathcal{D}_X^{(0)}$ (cf. par exemple [5] pour un rappel). Cette propriété, raffinée par la donnée d'une neutralisation d'une complétion centrale de $\mathcal{D}_X^{(0)}$, donne lieu à diverses applications intéressantes (correspondance de Simpson en caractéristique positive [5], classification d'équations différentielles [7], étude des représentations d'algèbres de Lie modulaires [2]....). Des variantes de certaines de ces applications existent (e.g. [6]) dans un contexte "quantique" qui fournit donc un cadre possible pour rechercher des relèvements modulo p^n $(n \geq 1)$ de la correspondance de Simpson en caractéristique p décrite dans [3]. Dans cette note, nous donnons des neutralisations explicites de deux complétions de l'algèbre de Weyl quantique D_q (spécialisée en une racine primitive de l'unité q d'ordre p), qui est "génériquement" (cf. par exemple [1], Prop. 2.3) une algèbre d'Azumaya. La plus intéressante d'entre elles (cf. 4.1.3) relève celle obtenue en caractéristique $p > 0$ dans [3], Thm. 4.13 et est la clef de l'obtention des relèvements modulo p^n auxquels on vient de faire allusion. Dans un travail ultérieur, nous montrerons comment ce point de vue permet de reconsidérer certains développements de la théorie des équations aux q-différences.

1 Notations

Nous noterons q une racine primitive de l'unité (dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ fixée) d'ordre p premier. Pour $n \geq 1$, on pose $[n] = 1 + q + ... + q^{n-1}$ et $[n]! = [n].[n-1]...[2].[1]$. Notons qu'on a $[p] = 0$.

*michel.gros@univ-rennes1.fr
†bernard.le-stum@univ-rennes1.fr

2 Définitions et Préliminaires

On pose $R := \mathbb{Z}[q]$ qu'on verra ci-dessous comme sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}$. On notera J l'idéal (maximal) de R engendré par $1-q$ et l'on identifiera R/J à $\mathbb{F}_p$. La classe de $[n]$ modulo J s'identifie alors simplement à la classe de n modulo p dans $\mathbb{Z}/p \simeq \mathbb{F}_p$.

Lemme 2.1. (i) L'élément q est inversible dans R.

(ii) Les éléments $[i]$ avec $(i,p)=1$ sont inversibles dans R.

Démonstration. (i) En effet, on a $q^p = 1$.

(ii) Si i est tel que $(i,p)=1$, on peut, dans $\overline{\mathbb{Q}}$, écrire

(2.1.1) $$\frac{1-q^i}{1-q}.\frac{1-q^{ij}}{1-q^i} = 1 \text{ dès que } ij \equiv 1(p).$$

Cette égalité vaut en fait dans R et l'assertion en résulte immédiatement grâce au théorème de Bézout. □

Définition 2.2. On appelle *algèbre de Weyl quantique* (sous-entendu spécialisée en q) le quotient D_q de l'anneau non commutatif $R\langle x,\delta\rangle$ des polynômes en deux variables x et δ par l'idéal engendré par $\delta x - qx\delta - 1$.

L'élément $\sigma := [\delta, x] := \delta x - x\delta = 1-(1-q)x\delta \in \mathrm{D}_q$ jouera un rôle important dans la suite.

On peut faire agir $\delta \in \mathrm{D}_q$ sur $R[x]$ en posant $\delta(x^n) = [n]x^{n-1}$. Cette action s'étend en une action de D_q sur $R[x]$ et l'on a $\sigma(x) = qx$ qui est donc un automorphisme de $R[x]$. On dispose ainsi d'un morphisme d'algèbres $\mathrm{D}_q \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(R[x])$ (dont on prendra garde qu'il n'est pas injectif : l'élément δ^p a pour image l'endomorphisme nul). On notera que δ agit sur $R[x]$ comme une σ-dérivation, au sens où $\delta(fg) = \delta(f)g + \sigma(f)\delta(g)$ pour tous $f, g \in R[x]$. Plus bas interviendront diverses complétions de D_q et de $R[x]$ et nous noterons de la même manière les actions de δ et de σ.

Soit $\mathrm{D} = \mathbb{F}_p < x, \partial > /(\partial x - x\partial - 1)$ l'algèbre de Weyl (ordinaire) sur $\mathbb{F}_p$ qui n'est autre que l'algèbre $\Gamma(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}, \mathcal{D}^{(0)}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}})$ des sections globales du faisceau des opérateurs différentiels de "niveau 0" sur la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$.

Proposition 2.3. L'application

(2.3.1) $$\mathrm{D}_q \otimes_R \mathbb{F}_p \to \mathrm{D} \quad ; \quad x \otimes 1 \mapsto x,\ \delta \otimes 1 \mapsto \partial$$

est un isomorphisme.

Démonstration. En effet, le module D_q (resp. D) est libre de base δ^k (resp. ∂^k) sur $R[x]$ (resp. $\mathbb{F}_p[x]$).□

Remarque. On pourrait (comme pour l'algèbre de Weyl ordinaire) introduire une théorie d'algèbre de Weyl quantique de niveau $m \geq 0$ avec des puissances divisées partielles de δ (cf. [3] pour le cas ordinaire) et développer pour ces algèbres une théorie analogue à celle qui va suivre.

3 Sur la propriété Azumaya

Notons Z_q le centre de l'algèbre D_q et $\mathrm{Z}(R[x])$ le centralisateur de $R[x]$ dans D_q.

Lemme 3.1. On a $[\delta, x^p] = [\delta^p, x] = [\delta^p, x^p] = 0$.

Démonstration. C'est immédiat à partir d'une des deux relations

$$\delta^n x = [n]\delta^{n-1} + q^n x \delta^n \tag{3.1.1}$$

$$\delta x^n = [n]x^{n-1} + q^n x^n \delta \tag{3.1.2}$$

obtenues par des récurrences sur n.

Soit $R[x^p, \delta^p]$ (resp. $R[x, \delta^p]$) l'algèbre commutative des polynômes en les variables x^p et δ^p (resp. x et δ^p).

Proposition 3.2. (i) L'application canonique $R[x^p, \delta^p] \to \mathrm{D}_q$ induit un isomorphisme

$$R[x^p, \delta^p] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Z}_q. \tag{3.2.1}$$

(ii) L'application canonique $R[x, \delta^p] \to \mathrm{D}_q$ induit un isomorphisme

$$R[x, \delta^p] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Z}(R[x]). \tag{3.2.2}$$

Démonstration. (i) Tout élément $P \in \mathrm{D}_q$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\delta^i$ avec $a_i(x) \in R[x]$. Compte tenu de la relation (3.1.1), la relation de commutation $Px = xP$ implique, en examinant l'égalité obtenue degré par degré en i dans l'écriture ci-dessus, que i doit être un multiple de p. Un argument analogue avec la commutation à δ (utilisant cette fois (3.1.2)) donne l'appartenance de chaque $a_i(x)$ à $R[x^p]$.

(ii) On procède de manière analogue. □

Dans la suite, pour tout R-module M, on notera $\widetilde{M}$ son séparé-complété J-adique (ou p-adique : c'est la même chose car $(p) \subset J$ et $J^p \subset (p)$).

Proposition 3.3. L'algèbre $\widetilde{\mathrm{D}_q}$ est une $\widetilde{\mathrm{Z}_q}$-algèbre d'Azumaya de rang p^2 neutralisée par l'extension $\widetilde{\mathrm{Z}_q} \to \widetilde{\mathrm{Z}(R[x])}$.

Démonstration. Montrons en effet que l'application canonique

$$\widetilde{\mathrm{D}_q} \otimes_{\widetilde{\mathrm{Z}_q}} \widetilde{\mathrm{Z}(R[x])} \to \mathrm{End}_{\widetilde{\mathrm{Z}(R[x])}}(\widetilde{\mathrm{D}_q}) \quad ; \quad Q \otimes Q' \mapsto (P \mapsto QPQ') \tag{3.3.1}$$

est un isomorphisme. Les modules en présence étant de même rang p^2, il suffit d'établir la surjectivité de (3.3.1). De plus, comme ils sont J-adiquement complets (car de type fini sur $\widetilde{\mathrm{Z}(R[x])}$), il suffit donc, grâce au lemme de Nakayama, de vérifier la surjectivité de la réduction modulo J de (3.3.1). Comme cette dernière s'identifie (avec les notations évidentes calquées des précédentes) à

$$\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{Z}} \mathrm{Z}(\mathbb{F}_p[x]) \to \mathrm{End}_{\mathrm{Z}(\mathbb{F}_p[x])}(\mathrm{D}) \quad ; \quad Q \otimes Q' \mapsto (P \mapsto QPQ') \tag{3.3.2}$$

la surjectivité découle immédiatement du résultat de M. Kaneda rappelé dans [3], thm. 3.7. □

Remarques. (i) Rappelons ([1], lemma 2.4) qu'on a $\sigma^p = 1 - (1-q)^p x^p \delta^p \in \mathrm{Z}_q$. On peut alors reformuler (une fois étendu ici les scalaires de R à $\overline{\mathbb{Q}}$) [1], Prop. 2.3 en disant que D_q est une Z_q-algèbre d'Azumaya au-dessus du lieu d'inversibilité $\mathcal{U} \subset \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Z}_q)$ de σ^p. Le lecteur observera que passer à la complétion J-adique rend automatiquement σ^p inversible (car $(1-q) = J$).

(ii) Nous ignorons si l'analogue évident de (3.3.1) avant J-complétion est un isomorphisme au-dessus de $\mathcal{U}$ (ce qui raffinerait [1], Prop. 2.3). C'est, comme on va le voir tout de suite, par exemple le cas pour $p = 2$ ($q = -1$), exemple qui va aussi nous servir à montrer où intervient l'inversibilité de σ^p dans la théorie. En effet, si σ^2 est inversible, alors, dans la base $(1, \delta)$ de D_q sur $\mathrm{Z}(R[x])$, les quatre matrices

$$E_1 := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

forment une base de $\mathrm{End}_{\mathrm{Z}(R[x])}(\mathrm{D}_q)$ (au-dessus de $\mathcal{U}$) et l'isomorphisme cherché s'obtient en vérifiant que

$$
\begin{aligned}
\text{(3.3.4)} \qquad & u := (1 \otimes x - x \otimes 1) + 2[x \otimes x\delta - x^2 \otimes \delta] \mapsto E_1, \\
& v := u.\delta \mapsto E_2, \\
& 1 \otimes \sigma^2 - v \mapsto E_3, \\
& 1 \otimes \sigma^2\delta - 1 \otimes u\delta^2 \mapsto E_4.
\end{aligned}
$$

4 Neutralisation

Soit I l'idéal de Z_q engendré par δ^p. Dans la suite, pour tout Z_q-module M, on notera $\widehat{M}$ son séparé complété I-adique. Comme il résultera de la proposition 4.1 ci-dessous, le complété $\widehat{\mathrm{Z}_q}$ s'identifie bien au centre de $\widehat{\mathrm{D}_q}$, ne créant ainsi aucune ambiguité dans les notations. Par commodité, nous utiliserons librement dans la suite la base $(1, x, \ldots., x^{p-1})$ du $\widehat{\mathrm{Z}_q}$-module $\widehat{\mathrm{Z}(R[x])}$.

Proposition 4.1. Soient $D = (d_{i,j})_{1\leq i,j\leq p}, X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq p} \in \mathrm{End}_{\widehat{\mathrm{Z}_q}}(\widehat{\mathrm{Z}(R[x])})$ les endomorphismes définis (dans la base ci-dessus) par les matrices dont les seuls coefficients non nuls sont les suivants :

$$
d_{i,i+1} = [i] + q^i x^p \frac{\delta^p}{[p-1]!} \text{ pour } i \in [1, p-1] \text{ et } d_{p,1} = \frac{\delta^p}{[p-1]!}\,; \tag{4.1.1}
$$

$$
x_{1,p} = x^p \text{ et } x_{i,i-1} = 1 \text{ pour } i \in [2, p]. \tag{4.1.2}
$$

Alors, l'application de R-algèbres $R\langle x, \delta\rangle \to \mathrm{End}_{\widehat{\mathrm{Z}_q}}(\widehat{\mathrm{Z}(R[x])})$ définie par $\delta \mapsto D\,;\, x \mapsto X$ induit, par passage au quotient, un isomorphisme de $\widehat{\mathrm{Z}_q}$-algèbres

$$
\widehat{\mathrm{D}_q} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{\widehat{\mathrm{Z}_q}}(\widehat{\mathrm{Z}(R[x])}). \tag{4.1.3}
$$

De plus, la réduction modulo p de (4.1.3) s'identifie canoniquement à l'isomorphisme du thm. 4.13 de [3].

Démonstration. On a donc

$$
D = \begin{pmatrix}
0 & [1] + qx^p\dfrac{\delta^p}{[p-1]!} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & [2] + q^2x^p\dfrac{\delta^p}{[p-1]!} & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 0 \\
0 & & \ddots & & [p-1] + q^{p-1}x^p\dfrac{\delta^p}{[p-1]!} \\
\dfrac{\delta^p}{[p-1]!} & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & x^p \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les seuls coefficients non nuls de DX (resp. XD) sont situés sur la diagonale et le (j,j)-ième vaut

$$[j] + x^p q^j \frac{\delta^p}{[p-1]!} \text{ (resp. } [j-1] + x^p q^{j-1} \frac{\delta^p}{[p-1]!} \text{)} \tag{4.1.4}$$

pour tout $j \in [1,p]$ (avec ici l'abus d'écriture $[0] = 0$). La matrice $DX - qXD - 1$ a donc pour (j,j)-ième coefficient

$$[j] + x^p q^j \frac{\delta^p}{[p-1]!} - q([j-1] + x^p q^{j-1} \frac{\delta^p}{[p-1]!} - 1) \tag{4.1.5}$$

qui est effectivement nul car $[j] = 1 + q[j-1]$ pour tout $j \in [1,p]$.

On dispose donc bien de l'application (4.1.3). On va ensuite utiliser un argument de réduction modulo I. Etablissons tout d'abord le

Lemme 4.2. L'action naturelle de D_q sur $R[x]$ est $R[x^p]$-linéaire et induit un isomorphisme

$$\mathrm{D}_q/I \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_{R[x^p]}(R[x]). \tag{4.2.1}$$

Démonstration. La $R[x^p]$-linéarité résulte du lemme 3.1. Comme les deux modules ont même rang p sur $R[x^p]$, il suffit de prouver l'injectivité. Or, si l'on choisit un représentant $P = \sum_{i=0}^{p-1} a_i(x)\delta^i \in \mathrm{D}_q$ de $\overline{P} \in \mathrm{D}_q/I$ et si celui-ci vérifie $P(x^j) = 0$ pour tout $j \in [0, p-1]$, on a clairement $P = 0$.

Revenons à la démonstration de la proposition : les deux membres de (4.1.3) étant de même rang p^2 sur $\widehat{\mathrm{Z}_q}$, il suffit de vérifier la surjectivité. Comme ils sont de plus complets, grâce au lemme de Nakayama, on est ramené à prouver la surjectivité de la réduction modulo I de (4.1.3). Cette réduction s'identifie canoniquement à l'isomorphisme (4.2.1) : d'où la proposition. $\square$

Remarque. Comme dans [3], (p.19 warning) on notera que l'application $\Phi : \mathrm{Z}_q \to \mathrm{Z}_q \simeq \mathrm{Z}(\mathrm{End}_{\mathrm{Z}_q}(\mathrm{Z}(R[x])))$ (Z désignant le centre dans le second membre) ; $\delta^p \to D^p$, $x^p \to X^p$ n'est pas l'identité (mais induit un automorphisme de $\widehat{\mathrm{Z}_q}$). Nous ignorons si l'extension $\Phi : \mathrm{Z}_q \to \mathrm{Z}_q$ permet de neutraliser D_q au-dessus de $\mathcal{U}$.

Corollaire 4.3. La catégorie des $\widehat{\mathrm{D}_q}$-modules est équivalente à celle des $\widehat{\mathrm{Z}_q}$-modules.

Démonstration. C'est simplement l'équivalence de Morita qui à un $\widehat{\mathrm{D}_q}$-module E associe le $\widehat{\mathrm{Z}_q}$-module $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathrm{D}_q}}(\widehat{\mathrm{Z}(R[x])}, E)$ et à un $\widehat{\mathrm{Z}_q}$-module F associe le $\widehat{\mathrm{D}_q}$-module $\widehat{\mathrm{Z}(R[x])} \otimes_{\widehat{\mathrm{Z}_q}} F$.$\square$

Notons maintenant, pour la suite, qu'on dispose d'un isomorphisme $\widehat{\mathrm{Z}_q} \simeq R[x][[\xi]]$; $x^p \mapsto x, \delta^p \mapsto \xi$.

Définition 4.4. Un $R[x]$-*module de Higgs* est un module H muni d'un endomorphisme $R[x]$-linéaire ξ_H. On dit qu'il est *quasi-nilpotent* si pour tout $h \in H$, il existe $d \geq 0$ tel que $\xi_H^d(h) = 0$.

Définition 4.5. Une σ-*dérivation* sur un $R[x]$-module M est une application R-linéaire $D_M : M \to M$ telle que $D_M(fm) = \delta(f)m + \sigma(f)D_M(m)$ pour tous $f \in R[x]$, $m \in M$. On dit que celle-ci est *quasi-nilpotente* si pour tout $m \in M$, il existe un entier naturel d tel que $D_M^d(m) = 0$.

On a alors le résultat suivant, qui ne fait que paraphraser le précédent lorsqu'on se limite aux objets quasi-nilpotents (voir définition 5.4 et la remarque suivant la proposition 5.5. dans [3]) :

Corollaire 4.6. La catégorie des $R[x]$ modules M munis d'une σ-dérivation quasi-nilpotente est équivalente à celle des $R[x]$-modules de Higgs H quasi-nilpotents.

Les corollaires 4.3 et 4.6 restent évidemment vrais lorsque l'on étend les scalaires, par exemple de R à $\overline{\mathbb{Q}}$ (ou tout autre anneau intermédiaire), ou avec des anneaux de séries formelles en x (avec conditions de convergence éventuelle) à la place de $R[x]$.

Remarque. L'application $\Phi : \mathrm{Z}_q \to \mathrm{Z}_q$ ci-dessus est naturellement la restriction de l'application $\Phi : \widehat{\mathrm{D}_q} \to \widehat{\mathrm{D}_q}$ définie par $\Phi(\delta^i) = D^i(1)$ (e.g. $\Phi(\delta) = \dfrac{x^{p-1}\delta^p}{[p-1]!}$). On peut alors reformuler, dans le corollaire 4.6, le passage de M à H comme la considération des points fixes de M par Φ (cf. [3], Def. 4.9, prop. 5.7 pour le cas analogue en caractéristique $p > 0$).

Signalons pour terminer qu'il n'y a aucune difficulté à étendre, pour $n \geq 1$, ces résultats au cas où q est une racine primitive p^n-ième de l'unité.

Références

[1] Backelin, E. : *Endomorphisms of quantized Weyl algebras.* arXiv :1007.2620v1.

[2] Bezrukavnikov, R. ; Mirkovic, I. ; Rumynin, D. : *Localization of modules for a semi-simple Lie algebra in prime characteristic (with an appendix by R. Bezrukavnikov and S. Riche).* Ann. of Math. (2) 167 (2008), 945-991. MR 2415389.

[3] Gros, M. ; Le Stum, B. ; Quiros, A. : *A Simpson correspondence in positive characteristic.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 46 (2010) 1-35. MR 2662614.

[4] Grothendieck, A. ; Dieudonné, J.A. : *Éléments de Géométrie Algébrique I (seconde édition).* Springer-Verlag (1971).

[5] Ogus, A. ; Vologodsky, V. : *Nonabelian Hodge theory in characteristic p*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 106 (2007), 1-138. MR 2373230.

[6] Tanisaki, T. : *Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity II.* arXiv :1101.5848v1.

[7] van der Put, M. : *Differential equations in characteristic p*, Compos. Math. 97 (1995), 227-251. MR 1355126.