

(φ, Γ) -modules associés aux courbes hyperelliptiques lisses*

C. Huyghe et N. Wach

10 juin 2013

Abstract

In 2003, Kedlaya gave an algorithm to compute the zêta function associated to an hyperelliptic curve over a finite field, by computing the rigid cohomology of the curve. Edixhoven remarked that it is actually possible to compute the crystalline cohomology of the curve, which is a lattice in the rigid cohomology. Following a method of Wach, we explain here how to use this lattice to compute the (φ, Γ) -module associated to an hyperelliptic curve.

Résumé

En 2003, Kedlaya a donné un algorithme pour calculer la fonction zêta d'une courbe hyperelliptique sur un corps fini, en calculant la cohomologie rigide de la courbe. Edixhoven a remarqué qu'on pouvait en fait calculer la cohomologie cristalline de la courbe, qui est un réseau dans la cohomologie rigide. En suivant une méthode due à Wach, nous expliquons ici comment utiliser ce réseau pour calculer le (φ, Γ) -module associé à une courbe hyperelliptique.

Table des matières

1	Conventions, notations	3
2	Méthode de calcul du complexe de de Rham d'une courbe	4
3	Cohomologie de de Rham des courbes hyperelliptiques	7
4	Action du Frobenius et (φ, Γ)-module associé	13

*Les deux auteurs ont bénéficié du soutien du projet CETHop : ANR-09-JCJC-0048-01, coordonné par Xavier Caruso, projet de l'Agence Nationale de la Recherche.

MSC classification 2010 : 11S23, 14F30, 14F40

Introduction

Soient k un corps fini de caractéristique p différente de 2, de cardinal p^n , $W = W(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt de k , K le corps des fractions de W , S le schéma $\text{Spec } W$, X une courbe hyperelliptique lisse sur $W(k)$, de genre g , X_k , resp. X_K la fibre spéciale, resp. la fibre générique de X . Le but de ce texte est d'expliquer comment calculer modulo p^i le (φ, Γ) -module associé à la courbe X_K , c'est-à-dire le (φ, Γ) -module associé à la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^1(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$.

Le point de départ est le calcul par Kedlaya [Ked01], de la cohomologie rigide d'une courbe hyperelliptique et de l'action du Frobenius sur cette cohomologie. Edixhoven, peut-être inspiré par un argument de Katz dans le cas des courbes elliptiques qu'on trouve dans A1.2 de [Kat73], a ensuite remarqué dans [Edi03] que l'on pouvait calculer un réseau (en fait la cohomologie cristalline) dans la cohomologie rigide des courbes hyperelliptiques. Bogaart a enfin donné la démonstration du résultat d'Edixhoven dans un preprint non publié [vdB08]. Walker a systématisé l'approche de Bogaart dans le cas des courbes dans [Wal11] en utilisant le langage plus naturel des catégories dérivées. On ne dispose pas cependant de calcul purement cristallin du Frobenius : pour ce faire, il faut utiliser la méthode de Kedlaya. Le calcul du (φ, Γ) -module associé à la courbe X_K fait intervenir un algorithme dû à Wach [Wac97] et nécessite de disposer d'un réseau stable par le Frobenius dans la cohomologie rigide de X_k , d'où l'intérêt de la remarque d'Edixhoven. Le résultat que nous prouvons est le suivant : connaissant la matrice du Frobenius dans une base adaptée à la filtration de Hodge de la cohomologie cristalline, il est possible de déterminer algorithmiquement le (φ, Γ) -module associé à la courbe X . Si la courbe est de genre g , la complexité de l'algorithme calculant le (φ, Γ) -module modulo (p^i, T^j) est au plus $O(n^3 g^3 i^3 j^3)$. Il faut y rajouter la complexité de l'algorithme de Kedlaya pour calculer la matrice de Frobenius qui est $O(n^{3+\varepsilon} g^{4+\varepsilon})$.

On peut se poser une question plus faible et calculer seulement le (φ, Γ) -module modulo p associé à la courbe hyperelliptique. La méthode pour déterminer la matrice du Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline modulo p repose sur le morphisme de Deligne-Illusie [DI87] et est une conséquence du résultat de [HW13]. L'algorithme de Kedlaya est alors remplacé par un algorithme dont la complexité est $O(n^{2+\varepsilon} g^{2+\varepsilon})$.

Après une première partie de notations, nous donnons dans une deuxième partie une stratégie générale pour calculer la cohomologie de de Rham d'une courbe projective lisse sur W . En effet, d'après le théorème de comparaison de Berthelot, cette cohomologie de de Rham est canoniquement isomorphe à la cohomologie cristalline de la courbe X_k . En particulier, cela nous donne un réseau stable par le Frobenius dans la cohomologie rigide de X_k . Cette stratégie de calcul reprend celle de Bogaart-Edixhoven et est exposée ici dans le cadre des catégories dérivées. L'argument est simple : si on twist le complexe de de Rham de X par une puissance suffisante du faisceau inversible associé au diviseur à l'infini, on obtient un complexe acyclique pour le foncteur sections globales. Et le quotient des deux complexes

est un complexe à support au point à l'infini. Du coup, tout est facilement calculable dans la catégorie dérivée des complexes de W -modules, pourvu que l'on sache déterminer les sections globales du module des différentielles. C'est ce que nous faisons dans la troisième partie.

Dans la quatrième partie, nous détaillons comment trouver le (φ, Γ) -module associé à la courbe X . On considère le produit tensoriel sur W de l'anneau $S = W[T]$ et du W -module $H_{cris}^1(X)$, sur lequel on définit une action naturelle de φ ; l'algorithme, déjà expliqué dans [Wac97], consiste à déterminer la matrice d'un générateur de Γ par dévissages modulo les puissances de p et les puissances de T . Il suffit alors de calculer l'inverse d'une matrice. En 4.3, nous présentons l'algorithme calculant modulo p la matrice du Frobenius divisé sur la cohomologie cristalline, c'est-à-dire la matrice qu'il faut inverser pour déterminer le (φ, Γ) -module modulo p .

Nous remercions Jérémy Leborgne, qui nous a aidées à éclaircir les problèmes de complexité.

1 Conventions, notations

Si X est un S -schéma, nous noterons X_0 la fibre spéciale et X_K la fibre générique.

Une courbe X sur S est par définition un S -schéma noetherien de dimension 1 qui est de type fini sur S , irréductible, dont les fibres sur S (c'est-à-dire la fibre spéciale et la fibre générique) sont réduites et connexes, géométriquement réduites et géométriquement connexes. On suppose de plus qu'il existe une section $i_s : S \hookrightarrow X$ correspondant à un diviseur relatif de degré 1 sur S .

Sous ces hypothèses (3.3.21 de [Liu02]), $H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = k$ et $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$.

On dit qu'une courbe X est de genre g si la fibre générique et la fibre spéciale sont de genre arithmétique égal à g . Dans le cas où X est lisse, ce qui sera toujours le cas ici, l'égalité de ces deux nombres est automatique, par invariance de la caractéristique d'Euler Poincaré (5.3.28 de [Liu02]), et platitude de \mathcal{O}_X sur W . De plus, si X est lisse, X est un schéma intègre.

Dans cet article, la catégorie $D^b(W)$ désignera la catégorie dérivée des complexes de W -modules sur une courbe X , à cohomologie bornée.

Nous disons qu'une courbe lisse X vérifie la condition de Mazur explicitées dans l'appendice de [Maz73], si

$$\forall i \in \{0, 1\}, \forall j \in \{0, 1\} \quad H^i(X, \Omega_X^j) \text{ est un } W \text{ module libre.} \quad (1)$$

Si ces conditions sont vérifiées, alors, par définition, les modules $E_1^{j,i}$ de la suite spectrale de Hodge vers de Rham sont des W -modules libres et donc la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère d'après loc. cit..

Nous nous intéressons dans ce qui suit au calcul explicite de la cohomologie de de Rham de X . Dans le cas propre et lisse, on dispose en effet du théorème de comparaison de Ber-

thelot, identifiant la cohomologie cristalline de X_k et la cohomologie de de Rham de X . Une conséquence importante est que ce réseau est donc stable par l'action du Frobenius sur la cohomologie rigide de X_k . Ceci sera utile pour la méthode de Wach.

2 Méthode de calcul du complexe de de Rham d'une courbe

Dans cette section X est une courbe lisse de genre g comme définie en 1. Si C est le complexe de de Rham

$$C : 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0,$$

dont les termes sont en degré 0 et 1, la cohomologie de de Rham de X est la cohomologie du complexe $R\Gamma(X, C)$. Nous considérons aussi le complexe de de Rham twisté $C(nD)$ où D est un diviseur de X

$$C(nD) : 0 \rightarrow \mathcal{O}_X((n-1)D) \rightarrow \Omega_X^1(nD) \rightarrow 0.$$

La filtration bête du complexe C induit la suite spectrale de Hodge vers de Rham. La proposition suivante rappelle un critère de dégénérescence standard.

Proposition 2.1. (i) *Sous nos hypothèses, la condition de Mazur 1 est vérifiée. En particulier, la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère au niveau E_1 . De plus $H^0(X, \mathcal{O}_X) = W$.*

(ii) *Les modules $H_{DR}^0(X)$ et $H_{DR}^2(X)$ s'identifient à W , le module $H_{DR}^1(X)$ est un W -module libre.*

Démonstration. Le terme général de la suite spectrale de Hodge vers de Rham est $E_1^{j,i} = H^i(X, \Omega_X^j)$, les différentielles de la suite spectrale proviennent des flèches canoniques $H^i(X, \Omega_X^j) \rightarrow H^i(X, \Omega_X^{j+1})$ et la dégénérescence de la suite spectrale équivaut, dans le cas d'une courbe lisse X , à la nullité de la flèche $H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$.

Montrons que les modules $H^i(X, \Omega_X^j)$ sont des W -modules libres. Ceci résulte par exemple du lemme 3.1 de [vdB08], dont nous reproduisons la démonstration ici. D'après le théorème de semi-continuité (5.3.20 de [Liu02]), il suffit de vérifier que les groupes de cohomologie $H^i(X_k, \Omega_{X_k}^j)$ et $H^i(X_K, \Omega_{X_K}^j)$ ont même dimension pour $i, j \in \{0, 1\}$. La caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux \mathcal{O}_{X_k} et \mathcal{O}_{X_0} est la même. De plus, $H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = k$ et $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$ ont même dimension sur k et K respectivement, de sorte que $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ et $H^1(X_K, \mathcal{O}_{X_K})$ ont aussi même dimension. Par dualité de Serre, les modules $H^i(X_0, \Omega_{X_0}^1)$ et $H^i(X_K, \Omega_{X_K}^1)$ ont aussi même dimension. Ainsi la courbe X vérifie la condition de Mazur.

Considérons maintenant $M = H^0(X, \mathcal{O}_X)$: c'est un W -module libre M tel que $M \otimes K$ est isomorphe à $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}) = K$, et qui est donc isomorphe à W . Par dualité de Serre (III, §11 de [Har66]) et compte tenu du fait que $H^1(X, \Omega_X^1)$ est un W -module libre, nous trouvons que $H^1(X, \Omega_X^1) \simeq W$. Ceci mis ensemble montre (i). La dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham implique que l'on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H_{DR}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0,$$

de sorte que le W -module $H_{DR}^1(X)$ est libre. De plus $H_{DR}^0(X) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq W$, et $H_{DR}^2(X) \simeq H^1(X, \Omega_X^1) = W$. \square

Considérons maintenant un diviseur relatif D sur X . Alors nous pouvons compléter la proposition précédente par la

Proposition 2.2. *i Si D est de degré > 0 , alors $H^0(X, \Omega_X^1(D))$ est un W -module libre et $H^1(X, \Omega_X^1(D)) = 0$.*

ii Si D est de degré ≥ 1 et si n est un entier tel que $(n-1)\deg(D) > 2g-2$, alors $H^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)D))$ est un W -module libre et le complexe $C(nD)$ est à termes acycliques pour le foncteur Γ .

Démonstration. Là encore, nous suivons 3.1 de [vdB08]. Si D est de degré > 0 , alors $\dim H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(-D)) = \dim H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}(-D)) = 0$ et donc, par dualité de Serre, $\dim H^1(X_0, \Omega_{X_0}^1(D)) = \dim H^1(X_K, \Omega_{X_K}^1(D)) = 0$, ce qui entraîne comme précédemment que $H^1(X, \Omega_X^1(D)) = 0$ car ce module est un W -module de type fini. Par invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré, il y a donc aussi égalité des dimensions des $H^0(X_0, \Omega_{X_0}^1(D))$ et de $H^0(X_K, \Omega_{X_K}^1(D))$, d'où le fait que $H^0(X, \Omega_X^1(D))$ est un W -module libre et (i). En particulier, avec les hypothèses de (ii), on sait que $H^1(X, \Omega_X^1(nD)) = 0$. Le raisonnement est identique pour (ii), puisque $H^0(X_0, \Omega_{X_0}^1(-(n-1)D))$ (resp. $H^0(X_K, \Omega_{X_K}^1(-(n-1)D))$) est nul, car le degré de $\Omega^1(-(n-1)D)$ est < 0 . Par dualité de Serre, $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}((n-1)D))$ (resp. $H^1(X_K, \mathcal{O}_{X_K}((n-1)D))$) est nul, et ceci montre que $H^1(X, \mathcal{O}_X((n-1)D)) = 0$. Par invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré, on obtient aussi que $H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}((n-1)D))$ et $H^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}((n-1)D))$ ont même dimension et donc que $H^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)D))$ est un W -module libre. \square

Remarque. On notera que la différentielle

$$d_1^{\{0,0\}} : H^0(X, \mathcal{O}_X((n-1)D)) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(nD)),$$

n'est pas nulle en général (par exemple pour \mathbf{P}_S^1 , $n = 2$, D le point à l'infini) et donc que la suite spectrale associée à la filtration bête du complexe $C(nD)$ ne dégénère pas en général.

Fixons maintenant une section $i_s : S \hookrightarrow X$ correspondant à un diviseur relatif de degré ≥ 1 et n strictement supérieur à $2g-2$. La suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow C \rightarrow C(nD) \rightarrow C(nD)/C \rightarrow 0,$$

donne lieu à un triangle distingué (T') dans $D^b(W)$.

Si t est un paramètre local définissant la section s , le complété de $\mathcal{O}_{X,t}$ pour la topologie t -adique s'identifie à l'anneau de séries formelles $W[[t]]$ (chap. 8, §5 Anneaux locaux réguliers, thm 2 de [Bou83]) et le complexe de faisceaux gratte-ciels $C(nD)/C$ au complexe

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} Wt^{-i} \xrightarrow{d} \bigoplus_{i=1}^n Wt^{-i} dt.$$

Comme $d(t^{-i}) = (-i)t^{-(i+1)}$, le complexe $R\Gamma(X, C(nD)/C)$ est concentré en degré 1, où il s'identifie à

$$\text{coker}(d) = \bigoplus_{i=1}^n (W/(i-1)W)t^{-i} dt. \quad (2)$$

En outre, le complexe $R\Gamma(X, C(nD))$ est représenté par le complexe

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X((n-1)D)) \rightarrow \Gamma(X, \Omega_X^1(nD)) \rightarrow 0.$$

Finalement, pour calculer la cohomologie de de Rham, on dispose d'un triangle distingué

$$R\Gamma(X, C) \rightarrow R\Gamma(X, C(nD)) \rightarrow R\Gamma(X, C(nD)/C) \xrightarrow{\pm} R\Gamma(X, C). \quad (3)$$

Le but de cet article est de décrire ce triangle dans le cas des courbes hyperelliptiques, pour D correspondant au point à l'infini et $n = 2g$, où g est le genre de la courbe. Pour les calculs, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soient U un ouvert affine de X , supposé irréductible, tel que U_0 soit un ouvert non vide de la fibre spéciale X_0 , et \mathcal{E} un faisceau localement libre de rang fini sur X .*

(i) *Soit $f \in \mathcal{E}(U)$ tel qu'il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $p^l f \in \mathcal{E}(X)$, alors $f \in \mathcal{E}(X)$.*

(ii) *De plus $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{E}(U)$ et le quotient est sans p -torsion.*

(iii) *Soit M un réseau de $\mathcal{E}(X)$, tel que $\mathcal{E}(U)/M$ soit sans p -torsion, alors $M = \mathcal{E}(X)$.*

Démonstration. Notons j l'inclusion de $U \hookrightarrow X$. Remarquons que, puisque X et X_0 sont des schémas intègres, les hypothèses impliquent que

$$\mathcal{E}/p\mathcal{E} \hookrightarrow j_*\mathcal{E}|_U/p\mathcal{E}|_U.$$

En effet, X_0 est recouvert par des ouverts affines sur lesquels $\mathcal{E}/p\mathcal{E}$ est un \mathcal{O}_{X_0} -module libre, si bien que l'assertion se ramène à la même assertion pour $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, qui résulte de l'intégrité de X_0 et du fait que U_0 est dense dans X_0 . En passant aux sections globales, et en tenant compte du fait que l'ouvert U est affine, on a une inclusion

$$r : \mathcal{E}(X)/p\mathcal{E}(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(U)/p\mathcal{E}(U).$$

Soit $f \in \mathcal{E}(U)$ comme dans l'énoncé, tel que $p^l f \in \mathcal{E}(X)$ avec $l \geq 1$. Nous procédons par récurrence sur l , le cas $l = 0$ étant évident. Posons $f' = p^{l-1}f \in \mathcal{E}(U)$. Alors $h = pf' \in \mathcal{E}(X)$, et $r(h) = 0$, ce qui montre qu'il existe $h' \in \mathcal{E}(X)$ tel que $h = pf' = ph'$, or $\mathcal{E}(X)$ est sans p -torsion car \mathcal{E} est localement libre, de sorte que ceci implique que $f' = h' \in \mathcal{E}(X)$. Ainsi $p^{l-1}f \in \mathcal{E}(X)$ et l'hypothèse de récurrence entraîne que $f \in \mathcal{E}(X)$. Le (ii) résulte du fait qu'on a une inclusion

$$\mathcal{E} \hookrightarrow j_*\mathcal{E}|_U,$$

d'où l'inclusion des sections globales. Le fait que le quotient soit sans p -torsion est une simple traduction de (i). Le (iii) vient du fait que l'on a une injection $\mathcal{E}(X)/M \hookrightarrow \mathcal{E}(U)/M$, de sorte que $\mathcal{E}(X)/M$ est sans torsion et comme M est un réseau de $\mathcal{E}(X)$, on a l'égalité $M = \mathcal{E}(X)$. \square

Nous aurons aussi besoin de quelques considérations de base à propos de l'action de l'involution hyperelliptique. Soient V une W -algèbre, M un V -module muni d'une action V -linéaire d'une involution u (telle que $u^2 = Id$). On pose alors :

$$M^- = \{x \in M \mid u(x) = -x\}, \quad M^+ = \{x \in M \mid u(x) = x\}.$$

Comme $\text{car}(k) \neq 2$, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} M^+ \oplus M^- \\ x &\longmapsto (x + u(x), x - u(x)), \end{aligned}$$

et le foncteur $M \mapsto M^-$ est exact, de même que $M \mapsto M^+$. Nous en déduisons le fait suivant. Soit $V \rightarrow V'$ un morphisme de W -algèbres. Si M est muni d'une involution V -linéaire, u , alors $1 \otimes u$ est une involution V' -linéaire du V' -module $M \otimes_V V'$, et le morphisme canonique $M^- \otimes_V V' \rightarrow (M \otimes_V V')^-$ est un isomorphisme (resp. avec M^+).

3 Cohomologie de de Rham des courbes hyperelliptiques

3.1 Equations

3.1.1 Données

Soit P un polynôme unitaire de $W[X]$ de degré impair $d = 2g + 1$, tel que P est séparable comme polynôme à coefficients dans K et tel que la classe de P dans $k[X]$ est aussi séparable. On note $P(X) = X^d + \sum_{l=1}^{d-1} a_l X^l$.

Définissons, suivant 7.4.24 de [Liu02], la courbe hyperelliptique X suivante. Soient $[u, v]$ les coordonnées projectives sur $\mathbf{P}_{W'}^1$, $x = v/u$ une coordonnée fixée sur $D_+(u)$, $x_1 = u/v$ une autre fixée sur $D_+(v)$. La courbe X est un revêtement h de degré 2 de $\mathbf{P}_{W'}^1$, réunion de deux ouverts affines $U = h^{-1}(D_+(u))$ et $W = h^{-1}(D_+(v))$ donnés par

$$U = \text{Spec}W[x, y]/y^2 - P(x),$$

$$V = \text{Spec}W[x_1, t]/t^2 - P_1(x_1),$$

où l'on a posé $P_1(x_1) = x_1^{d+1}P(1/x_1) = x_1 R_1(x_1)$, $t = y/x^{g+1}$.

Les conditions sur P assurent que la courbe X ainsi définie est lisse et irréductible. De même, les fibres génériques et spéciales sont lisses, connexes et géométriquement connexes.

Nous pouvons donc appliquer les résultats de 2. On note X_0 la fibre spéciale de X et X_K la fibre générique de X .

On vérifie facilement que comme dans le cas d'un corps le lieu de ramification de h est $V(P) \cup V(x_1)$.

Dans la suite nous noterons A (resp. A') la W -algèbre $W[x, y]/y^2 - P(x)$, qui est un $W[x]$ -module libre de rang 2 de base $1, y$.

L'application définie sur U par $\iota(x, y) = (x, -y)$ et sur V par $\iota(x_1, t) = (x_1, -t)$ définit une involution de X dont les points fixes sont le lieu de ramification de h .

3.1.2 Situation en l'infini

Par convention, le point à l'infini noté ∞ de \mathbb{P}_W^1 correspond à $x_1 = 0$, et le point à l'infini aussi noté ∞ de X est le point de V vérifiant $x_1 = 0$. Remarquons que $R_1(x_1) = 1 + \sum_{l=1}^d a_{d-l} x_1^l$ est de valuation 0 en x_1 , en d'autres termes P'_1 est inversible de l'anneau local $\mathcal{O}_{X, \infty}$. Un générateur du faisceau localement libre Ω_V^1 est dx_1/t d'après 6.4.14 de [Liu02]. Dans le module $\Omega_{V, \infty}^1$ on a la relation $dx_1/2t = (P'(x_1)^{-1})dt$ de sorte que t est aussi un paramètre à l'infini sur X . Donnons quelques formules

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2y} &= -\frac{x_1^{g-1} dx_1}{2t} \in \Omega_V^1, \\ x &= x_1^{-1} = \frac{1}{t^2} R_1(x_1), \\ R_1(x_1) &= x_1^{2g+1} P(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Commençons par calculer les sections globales de $\Omega_X^1, \Omega_X^1(2g\infty)$ et préciser l'action de l'involution hyperelliptique ι sur ces modules.

3.2 Calculs de sections globales

Proposition 3.2.1. *Le W -module $H^0(X, \Omega_X^1)$ est libre de rang g de base*

$$\omega_i = \frac{x^i dx}{y} = -\frac{x_1^{g-1-i} dx_1}{t}, \quad 0 \leq i \leq g-1.$$

Sur un corps, cela résulte de 7.4.26 de [Liu02]. D'après 6.4.14 de [Liu02], le faisceau Ω_U^1 (resp. Ω_V^1) est libre, engendré par ω_0 (resp. ω_{g-1}) de sorte que les éléments considérés sont clairement des éléments linéairement indépendants de $H^0(X, \Omega_X^1)$. Soit maintenant M le sous-module des sections globales engendré par les ω_i pour $0 \leq i \leq g-1$, qui est a priori un réseau de $H^0(X, \Omega_X^1)$. Alors $\Omega_X^1(U)/M$ est libre sur W , de base les $x^j \omega_0$ pour $j \geq g$ et les $x^j y \omega_0$ pour $j \geq 0$, si bien que $M = H^0(X, \Omega_X^1)$ d'après le lemme 2.3.

En particulier, ι agit par $-Id$ sur les sections globales de Ω_X^1 . On en déduit le

Corollaire 3.2.2. *L'involution ι agit par $-Id$ sur $H_{DR}^1(X)$.*

Démonstration. D'après la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, on a une suite exacte courte $0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H_{DR}^1(X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0$. Nous venons de voir que ι agit par $-Id$ sur $H^0(X, \Omega_X^1)$. Le module $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est le dual de Poincaré de $H^0(X, \Omega_X^1)$ et donc ι agit aussi par $-Id$ sur ce module. Il s'ensuit que ι agit par $-Id$ sur $H_{DR}^1(X)$. \square

Proposition 3.2.3. (i) Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2g - 1$, le W -module $H^0(X, \mathcal{O}_X(n\infty))$ est libre de base les x^i pour $i \in \{0, \dots, [n/2]\}$ et les yx^i pour $i \in \{0, \dots, [(n-1)/2] - g\}$.

(ii) En particulier, le W -module $H^0(X, \mathcal{O}_X((2g-1)\infty))$ est libre de base les x^i pour $i \in \{0, \dots, g-1\}$ et

$$H^0(X, \mathcal{O}_X((2g-1)\infty)^- = 0.$$

Démonstration. Comme le faisceau $\mathcal{O}_X(n\infty)$ est localement libre, le module $H^0(X, \mathcal{O}_X((2g-1)\infty))$ est un W -module libre. Pour $n \geq 2g - 1$, la formule de Riemann Roch donne qu'il est de rang $n + 1 - g = [n/2] + 1 + [n-1/2] - g + 1$, qui est le nombre d'éléments considérés. Ces éléments sont bien des sections globales de $H^0(X, \mathcal{O}_X(n\infty))$ puisque, en vertu de 4,

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq i \leq [n/2], x^i = \frac{R_1(x_1)^i}{t^{2i}} \\ \text{si } 0 \leq i \leq [n/2] - g - 1, x^i y = \frac{R_1(x_1)^{g+1+i}}{t^{2(i+g)+1}}. \end{cases}$$

Notons alors M le sous W -module de $H^0(X, \mathcal{O}_X(n\infty))$ engendré par ces sections. Comme $\mathcal{O}_X(U)/M$ est un W -module libre, on voit grâce à 2.3, que $M = H^0(X, \mathcal{O}_X(n\infty))$. L'assertion (ii) n'est qu'un cas particulier de (i). \square

Nous en déduisons le corollaire.

Corollaire 3.2.4.

$$\forall 0 \leq i \leq g-2, x^i dx \in \Gamma(X, \Omega_X^1(2g\infty))^+.$$

Démonstration. En dérivant les sections globales de $\mathcal{O}_X((2g-1)\infty)$, on trouve des sections globales de $\Omega_X^1(2g\infty)$, lesquelles sont invariantes sous l'action de l'involution ι . De plus, en appliquant le lemme 2.3, on voit que si $ix^{i-1}dx \in \Gamma(X, \Omega_X^1(2g\infty))$, alors $x^{i-1}dx \in \Gamma(X, \Omega_X^1(2g\infty))$. \square

Remarque. Au passage, on constate que si la suite spectrale associée au complexe filtré $C(2g\infty)$ ne dégénère pas, la suite spectrale obtenue à partir de celle-ci après application de $\iota = -Id$ dégénère car $\text{car}(k) \neq 2$. L'aboutissement de cette suite spectrale est la partie de $R\Gamma(X, C(2g\infty))$ sur laquelle ι agit par $-Id$.

Proposition 3.2.5. Le W -module $H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty))^-$ est libre de rang $2g$ de base

$$\omega_i = \frac{x^i dx}{y} = -x_1^{2g-1-i} R_1(x_1)^g \frac{1}{t^{2g}} \frac{dx_1}{t}, \quad 0 \leq i \leq 2g-1.$$

Démonstration. Les éléments considérés sont clairement des sections globales de $\Omega_X^1(2g\infty)$, qui est un W -module sans torsion, puisque le faisceau $\Omega_X^1(2g\infty)$ est localement libre de rang 1. Calculons le rang de ce module. En passant à la suite exacte longue de cohomologie de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(2g\infty) \rightarrow t^{-2g}\mathcal{O}_{X,\infty}dt / \mathcal{O}_{X,\infty}dt \rightarrow 0,$$

et en appliquant le foncteur exact $\iota = -Id$, on trouve la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty)) \xrightarrow{v} \left(\bigoplus_{j=1}^{2g} W t^{-j} dt \right)^- \rightarrow H^1(X, \Omega_X^1)^-. \quad (5)$$

Le terme $H^1(X, \Omega_X^1)$ est dual de $H^0(X, \mathcal{O}_X) = W$ et donc ι agit trivialement sur ce module si bien que le dernier terme de la suite est nul. Le troisième terme de cette suite exacte est $\bigoplus_{i=1}^g W \cdot t^{-2i} dt$ puisque $\iota(dt) = -dt$. Le rang cherché est donc $2g$.

Notons M le sous-module engendré par les éléments ω_i , ce module est de rang $2g$ car les ω_i sont linéairement indépendants sur W dans $\Omega_X^1(U)$. Le même raisonnement que précédemment montre que $M = H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty))$ et finalement que le rang de $H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty))$ est $2g$. \square

Remarquons que $v(\omega_i) = 0$ si $0 \leq i \leq g-1$.

Dans tous les cas portant sur la caractéristique de k , le module $M = H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty))$ est libre de rang $3g-1$ par le théorème de Riemann-Roch et l'énoncé qui suit se démontre exactement de la même façon que le précédent.

Proposition 3.2.6. *Si $g \geq 2$*

$$H^0(X, \Omega_X^1(2g\infty)) = \bigoplus_{i=0}^{2g-1} W \cdot \frac{x^i dx}{y} \bigoplus_{i=0}^{g-2} \bigoplus W \cdot x^i dx.$$

Pour une courbe elliptique, seul le premier terme apparaît. On remarquera que les éléments $x^i dx$ sont invariants par l'involution hyperelliptique ι .

3.3 Calcul explicite de la cohomologie de de Rham des courbes hyperelliptiques

3.3.1 Calcul du passage au complété de l'anneau local en l'infini

Décrivons d'abord explicitement l'homomorphisme d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{X,\infty} \rightarrow W[[t]].$$

Notons $C = \mathcal{O}_{X,\infty}$ l'anneau local en ∞ de la courbe X , de sorte que

$$C = [W[x_1, t] / t^2 - x_1 R_1(x_1)]_{(pW[x_1, t] + tW[x_1, t])'}$$

dont la complétée pour la topologie t -adique est isomorphe à $W[[t]]$. On note λ l'application canonique $C \rightarrow W[[t]]$, et par abus de notation on continue de noter x_1 l'élément $\lambda(x_1)$. Cherchons x_1 sous la forme $x_1(t) = t^2 U(t)$ avec $U(t) = \sum_i q_i t^i \in W[[t]]$. L'élément U doit vérifier l'équation

$$(F) \quad t^2 = (t^2 U(t)) [R_1(t^2 U(t))],$$

c'est-à-dire $1 = U(t)R_1(t^2 U(t))$. Notons $f(X) = X(R_1(t^2 X)) - 1 \in W[[t]][X]$, l'image de f dans le corps résiduel k de $W[[t]]$ est $R_1(0)X - 1 = X - 1$ dont 1 est une racine simple de sorte qu'on peut appliquer le lemme de Hensel et voir qu'il existe un unique $U(t)$ de $W[[t]]$ (invertible) satisfaisant $f(U(t)) = 0$, et donc aussi un unique $x_1(t) = t^2 U(t) \in W[[t]]$ vérifiant l'équation (F).

Remarquons de plus que $P'_1(x_1) \in 1 + tW[[t]]$ est invertible dans $W[[t]]$, dont l'inverse sera noté $V(t)$. On a alors

$$\frac{dx_1}{2t} = \frac{dt}{P'_1(x_1)},$$

soit encore

$$\frac{dx_1}{2t} = V(t)dt.$$

Avec ces notations, du fait que $R_1(x_1) = U(t)^{-1}$ on voit que dans $\widehat{\Omega}_{X,\infty}^1 = W[[t]] \otimes \widehat{\Omega}_{X,\infty}^1$, on a l'égalité, en reprenant les notations de 3.2.5

$$\omega_i = -2t^{2(g-1-i)} U(t)^{g-1-i} V(t) dt.$$

Notons

$$\forall 0 \leq i \leq g-1, 2U(t)^{-1-i} V(t) = 2 + \sum_l u_{i,l} t^l, u_{i,l} \in W. \quad (6)$$

Alors, nous calculons $v(\omega_{g+i})$ où v est l'application définie en 5 :

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq i \leq g-1, v(\omega_{g+i}) &= -t^{-2(1+i)} \left(2 + \sum_{l=1}^{2i+1} u_{i,2l} t^{2l} \right) dt, \\ v(\omega_{g+i}) &= -2t^{-2(i+1)} dt - \sum_{l=1}^i u_{i,2l} t^{2(l-i-1)} dt, \\ &= -2t^{-2(i+1)} dt - \sum_{l=i}^1 u_{i,2(i+1-l)} t^{-2l} dt \end{aligned}$$

puisque les $v(\omega_{g+i})$ sont anti-invariants pour ι et que $\iota(t) = -t$. Pour terminer nous avons besoin de la proposition suivante

Corollaire 3.3.1.1. (Bogaart-Edixhoven, [vdB08],[Edi03]) On a une suite exacte courte

$$(E) \quad 0 \rightarrow H_{DR}^1(X) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^1(2g_\infty)) \xrightarrow{v'} \bigoplus_{j=1}^g (W/(2j-1)W) t^{-2j} dt \rightarrow 0.$$

Reprenons le triangle 3 de 2 avec D correspondant à la section à l'infini, et $n = 2g - 1$. On trouve le complexe exact

$$0 \rightarrow H_{DR}^0(X) \rightarrow R^0\Gamma(X, C(2g_\infty)) \rightarrow 0 \rightarrow H_{DR}^1(X) \rightarrow R^1\Gamma(X, C(2g_\infty)) \rightarrow \text{coker}(d) \rightarrow H_{DR}^2(X) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Appliquons maintenant $\iota = -Id$ à ce complexe. Par dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham, $H_{DR}^2(X)$ s'identifie à $H^1(X, \Omega_X^1) = W$ sur lequel ι agit trivialement et donc $H_{DR}^2(X)^-$ est nul, tout comme $H_{DR}^0(X)^-$.

Le complexe $R\Gamma(X, C(2g_\infty))$ est le complexe (2.2)

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(2g-1)_\infty) \xrightarrow{d} H^0(X, \Omega_X^1(2g_\infty)),$$

de sorte que $R^1\Gamma(X, C(2g_\infty))^-$ se réduit à $H^0(X, \Omega_X^1(2g_\infty))^-$ d'après 3.2.3.

Il reste à calculer $\text{coker}(d)^-$. Le conoyau $\text{coker}(d)$ est $\left(\bigoplus_{j=1}^{2g} W/(j-1)W t^{-j} dt\right)$.

En passant à la partie $-$ de ce module, seuls subsistent les termes correspondant à j pair, d'où le (i) de l'énoncé.

Reprenons les notations de 6.

Dans les bases $(\omega_0, \dots, \omega_{2g-1})$ et $t^{-2l} dt$ pour $1 \leq l \leq g$, la matrice de l'application v (5) qui est dans $M_{g,2g}(W)$ la suivante. Notons $V = (v_{2l,i})$ avec $v_{2l,i} \in W$, avec $i \in \{0, \dots, 2g-1\}$, $l \in \{1, \dots, g\}$ cette matrice. Les coefficients sont

$$\begin{aligned} \forall i \leq g-1, \forall l, v_{2l,i} &= 0 \\ \forall 0 \leq i \leq g-1, v_{2(i+1),g+i} &= -2 \\ \forall 0 \leq i \leq g-1, \forall l \leq i, v_{2l,g+i} &= -u_{i,2(i+1-l)} \\ \forall 0 \leq i \leq g-1, \forall l \geq i+1, v_{2l,g+i} &= 0. \end{aligned}$$

La matrice V est donc

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -u_{1,2} & -u_{2,4} & \dots & -u_{g-1,4g-1} \\ 0 & 0 & -2 & -u_{2,2} & \dots & -u_{g-1,4g-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \dots & -u_{g-1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}$$

et l'application v' s'obtient à partir de v par passage au quotient via la surjection canonique

$$\bigoplus_{i=0}^{g-1} W t^{-2(i+1)} dt \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{g-1} W/(2i+1)W t^{-2(i+1)} dt.$$

On voit donc que v induit une bijection notée \bar{v}

$$\bigoplus_{l=1}^g Wt^{-2l} \simeq \bigoplus_{i=0}^{g-1} Wt^{-2(i+1)} dt,$$

dont la matrice sera notée \bar{V} , et qui est triangulaire supérieure dans les bases choisies. Un élément $\omega \in \bigoplus_{i=0}^{g-1} Wt^{-2(i+1)} dt$ est dans $\text{Ker}(v')$ si et seulement si $\omega \in \bar{v}^{-1}(\text{Ker}(s))$. Or on a l'identification

$$\text{Ker}(s) = \bigoplus_{i=0}^{g-1} (2i+1)Wt^{-2(i+1)} dt.$$

Pour $i \in \{0, \dots, g-1\}$, définissons

$$\omega'_{g+i} = \bar{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (2i+1)t^{-2(i+1)} dt \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in (2i+1)\omega_{g+i} \bigoplus_{l \leq i} W\omega_{g+l}.$$

Nous avons alors la

Proposition 3.3.2. *Le W -module $H_{\text{DR}}^1(X)$ est libre de rang $2g$ de base des éléments*

$$\begin{aligned} \frac{x^i dx}{y} & \text{ pour } 0 \leq i \leq g-1, \\ \omega'_{g+i} & \text{ pour } 0 \leq i \leq g-1. \end{aligned}$$

Les deux énoncés précédents mis ensemble donnent dans le cas des courbes elliptiques. Dans ce cas, seuls les éléments du 1er type apparaissent.

Corollaire 3.3.3. *Si X est une courbe elliptique, on dispose d'un isomorphisme*

$$H_{\text{DR}}^1(X) \simeq H^0(X, \Omega_X^1(2\infty))^-.$$

4 Action du Frobenius et (φ, Γ) -module associé

4.1 Action du Frobenius

4.1.1 Généralités

Rappelons qu'un φ -module filtré sur W est la donnée d'un W -module muni d'un endomorphisme φ semi-linéaire par rapport au Frobenius de W et d'une filtration par des sous- W -modules, décroissante, exhaustive et séparée.

La cohomologie de De Rham $H_{DR}^1(X)$ d'une courbe X projective et lisse de genre g est un W -module libre de rang $2g$, muni de la filtration de Hodge :

$$\begin{aligned} \text{Fil}^r H_{DR}^1(X) &= H_{DR}^1(X) && \text{pour } r \leq 0, \\ &= H^0(X, \Omega_X^1) && \text{pour } r = 1, \\ &= 0 && \text{pour } r \geq 2. \end{aligned}$$

De plus, la cohomologie de De Rham de X s'identifie à la cohomologie cristalline $H_{cris}^1(X_k)$ de X_k [Ber74] ; elle est donc munie d'un endomorphisme de Frobenius, induit par l'action du Frobenius sur X_k . On obtient ainsi un φ -module filtré.

Lorsque les W -modules $H^p(X, \Omega_X^q)$ sont des W -modules libres et que la suite spectrale associée dégénère (Proposition 2.1 pour une courbe hyperelliptique), on sait, par une application d'un théorème de Mazur [Maz73] et [Fon83], que le φ -module filtré $H_{DR}^1(X)$ est un réseau fortement divisible de $H_{DR}^1(X_K)$: pour tout entier r , chaque $\text{Fil}^r H_{DR}^1(X)$ est un facteur direct de $H_{DR}^1(X)$, on a

$$\varphi(\text{Fil}^r H_{DR}^1(X)) \in p^r H_{DR}^1(X)$$

et

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \frac{1}{p^r} \varphi(\text{Fil}^r H_{DR}^1(X)) = H_{DR}^1(X).$$

Considérons $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ une base de $H_{DR}^1(X)$ adaptée à la filtration [Wac97] ; soit r_i le plus grand entier tel que $e_i \in \text{Fil}^{r_i} H_{DR}^1(X)$ et pour tout entier $r \geq 0$, posons $\varphi_r = \frac{1}{p^r} \varphi|_{\text{Fil}^r}$. On a ainsi, pour $1 \leq i \leq 2g$, si

$$e_i \in \text{Fil}^1 H_{DR}^1(X), \quad r_i = 1, \quad \text{et} \quad \varphi_1(e_i) = \frac{1}{p} \varphi(e_i)$$

et, sinon,

$$r_i = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_0(e_i) = \varphi(e_i).$$

Ecrivons, pour $1 \leq j \leq 2g$,

$$\varphi_{r_j}(e_j) = \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} e_i$$

l'expression de $\varphi_{r_j}(e_j)$ dans la base (e_i) . Le φ -module filtré $H_{DR}^1(X)$ étant fortement divisible, les applications φ_r sont bien définies et la matrice $A = (a_{ij})$, qui est une matrice à coefficients dans W , est inversible ([Wac97], 2.2.2).

4.1.2 Cas des courbes hyperelliptiques

La base $((\frac{x^i dx}{y})_{0 \leq i \leq g-1}, (\omega'_i)_{g \leq i \leq 2g-1})$ présentée dans le corollaire 3.3.2 est une base adaptée à la filtration. Notons $e_i = \frac{x^{i-1} dx}{y}$ (respectivement $e_i = \omega'_{i-1}$) pour $1 \leq i \leq g$ (respectivement pour $g+1 \leq i \leq 2g$) les éléments de cette base. On a bien, pour $1 \leq i \leq g$,

$$e_i \in \text{Fil}^1 H_{DR}^1(X) \quad \text{et} \quad \varphi_1(e_i) = \frac{1}{p} \varphi(e_i)$$

et, pour $g + 1 \leq i \leq 2g$,

$$e_i \in \text{Fil}^0 H_{DR}^1(X), \quad r_i = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_0(e_i) = \varphi(e_i).$$

Notons $X' = \text{Spec } A'$ la courbe obtenue en enlevant les points de ramification du revêtement $h : X \rightarrow \mathbf{P}_W^1$ et X'_k sa fibre spéciale. Kedlaya [Ked01] décrit un algorithme qui permet de calculer l'action du Frobenius sur la cohomologie rigide à coefficients dans K de la courbe X'_k . Cette cohomologie s'identifie à la cohomologie de de Rham (cf [BC94]) de X'_k et le K -espace vectoriel $H_{DR}^1(X'_k)$ se trouve ainsi muni d'une action de Frobenius. L'inclusion $X' \hookrightarrow X$ induit des applications $H_{DR}^1(X) \rightarrow H_{DR}^1(X')$ et $H_{DR}^1(X_K) \rightarrow H_{DR}^1(X'_K)$ qui sont injectives et équivariantes par l'action de Frobenius (cf [vdB08]). Nous pouvons donc utiliser cet algorithme pour calculer la matrice de φ , après changement de base, dans la base formée des vecteurs (e_i) , et en déduire la matrice A .

Remarque. Nous verrons ci-dessous un autre calcul possible qui fournit directement la matrice A modulo p via l'isomorphisme de Deligne et Illusie, calculé en utilisant le complexe de Čech.

4.2 (φ, Γ) -module associé

Considérons la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique K_∞ de K contenue dans \bar{K} , notons Γ le groupe de Galois de K_∞/K , qui est isomorphe à \mathbf{Z}_p , et choisissons-en un générateur topologique, noté γ . On munit l'anneau $S = W[[T]]$ d'une action de Γ telle que $\gamma(T) - T = \alpha(p + T)T$, où α est une unité de S , qui est congrue à une unité de \mathbf{Z}_p modulo T et à 1 modulo (p, T) . Dans ces conditions, il existe une unique action de Frobenius, notée φ , commutant à l'action de Γ , compatible avec le Frobenius sur W , qui relève l'élévation à la puissance p modulo p et telle que $\varphi(T) = u(p + T)^{p-1}T$, où $u \equiv 1$ modulo pS (pour un exposé détaillé des propriétés de S , voir [Fon90], 3.2, [Fon94], ou [Wac97], 3.1.1.).

Pour une courbe projective et lisse X vérifiant les hypothèses du théorème de Mazur [Maz73], on définit sur le module $N = S \otimes_W H_{DR}^1(X)$ une action de φ par

$$\varphi(1 \otimes e_j) = (p + T)^{r_j} \sum_{i=1}^{2g} a_{ij}(1 \otimes e_i),$$

l'action de Γ étant induite par la proposition suivante (cf [Wac97], 3.1.4, théorème 3) :

Proposition 4.2.1. *Il existe sur N une unique action de Γ commutant à φ et triviale modulo T .*

Démonstration. Nous reproduisons ici la démonstration de *op.cit.*, adaptée au cas particulier d'une courbe.

Il suffit de connaître la matrice du générateur γ dans la base $(1 \otimes e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$, notée simplement $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$; la démonstration se fait par dévissages modulo T et modulo p en déformant la matrice de l'identité I_{2g} , qui induit sur N une action de γ triviale modulo T , mais ne commutant pas à φ a priori. Notons ρ cette action :

$$\begin{aligned}\rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) &= (\gamma(p+T)^{r_j} - (p+T)^{r_j}) \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} e_i \\ &= (p+T)^{r_j} \alpha_j T \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} e_i\end{aligned}$$

si α_j est l'unique élément de S tel que

$$\gamma(p+T)^{r_j} = (p+T)^{r_j} (1 + T\alpha_j) \quad .$$

Comme S est complet pour la topologie T -adique, il suffit de vérifier le lemme suivant :

Lemme 4.2.2. Soient $n \in \mathbf{N}$ et ρ un endomorphisme de N , semi-linéaire par rapport à l'action de γ sur S tel que $\rho(e_j) \equiv e_j \pmod{T}$ et

$$\rho(\varphi(e_j)) \equiv \varphi(\rho(e_j)) \pmod{T^n(p+T)^{r_j}N}$$

pour tout j ; alors, il existe un endomorphisme ρ' de N , uniquement déterminé modulo T^{n+1} , semi-linéaire par rapport à l'action de γ sur S tel que, pour tout j :

$$\begin{aligned}\rho'(e_j) &\equiv \rho(e_j) \pmod{T^n N} \\ \text{et } \rho'(\varphi(e_j)) &\equiv \varphi(\rho'(e_j)) \pmod{T^{n+1}(p+T)^{r_j}N} \quad .\end{aligned}$$

Démontrons la proposition. On pose, pour tout j , $1 \leq j \leq 2g$:

$$\rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) = T^n(p+T)^{r_j} b_j$$

où b_j est un élément de N et on cherche la matrice G' de ρ' dans la base (e_i) sous la forme $G' = G + T^n X$ où G est la matrice de ρ et X une matrice à coefficients dans W .

Rappelons que $\varphi(T) = uT(p+T)^{p-1}$ avec u une unité de S ; alors,

$$\begin{aligned}\rho'(\varphi(e_j)) &= \rho'((p+T)^{r_j} \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} e_i) \\ &= \rho(\varphi(e_j)) + (p+T)^{r_j} (1 + T\alpha_j) T^n \sum_{1 \leq i, k \leq 2g} a_{kj} x_{ik} e_i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(\rho'(e_j)) &= \varphi(\rho(e_j)) + \varphi(T^n) \sum_{i=1}^{2g} \varphi(x_{ij}) \varphi(e_i) \\ &= \varphi(\rho(e_j)) + T^n (p+T)^{n(p-1)} u^n \sum_{1 \leq i, k \leq 2g} \varphi(x_{kj}) (p+T)^{r_k} a_{ik} e_i \quad .\end{aligned}$$

On obtient une équation matricielle à résoudre

$$(*) \quad B = u^n A' X'_\varphi - XA,$$

où B est la matrice modulo T du système (b_j) dans la base (e_i) , $A' = (p^{r_j} a_{ij})$ et $X'_\varphi = (p^{n(p-1)-r_j} \varphi(x_{ij}))$.

Ces matrices sont toutes à coefficients dans W , qui est complet pour la topologie p -adique; on commence par résoudre ce système modulo p .

Dans notre cas, $r_j = 0$ ou 1 , donc pour $p > 2$, on a $n(p-1) - r_j > 0$ et l'équation devient :

$$B \equiv -XA \pmod{p}$$

et on conclut en utilisant le fait que la matrice A est inversible.

Notons X_k une solution de $B = u^n A' X'_\varphi - XA$ modulo p^k et $B_k = B - u^n A' X'_{k,\varphi} + X_k A$. Relevons X_k en $X_{k+1} = X_k + p^k Y$ solution modulo p^{k+1} . L'équation vérifiée par Y est à nouveau $B' = -YA$ modulo p , qui se résout en inversant la matrice A . \square

Remarque : la démonstration est algorithmique ; il est possible de la programmer pour obtenir l'action de Γ à la précision modulo p^i et modulo T^j souhaitée.

4.3 Calcul direct du Frobenius divisé modulo p pour une courbe hyperelliptique

Pour un schéma Y sur $\text{Spec } k$, notons Y' le schéma déduit de Y par le changement de base induit par le Frobenius $\sigma : a \mapsto a^p$ sur k et $F : Y \rightarrow Y'$ le Frobenius relatif.

Soit X_0 un schéma propre et lisse sur $\text{Spec } k$, de dimension $< p$. Sous ces conditions, la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en E_1 ([FM87]) et le choix d'un scindage de la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \rightarrow H_{dR}^1(X_0/k) \rightarrow H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \rightarrow 0$$

détermine un isomorphisme

$$H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \oplus H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq H_{dR}^1(X_0/k).$$

Supposons de plus que X_0 se relève sur $W_2(k)$ en un schéma plat X_1 . Deligne et Illusie ([DI87]) ont construit une application

$$f_{X_1} : \bigoplus_{0 \leq i < p} \Omega_{X'_0/k}^i[-i] \rightarrow F_* \Omega_{X_0/k}$$

qui est un quasi-isomorphisme et induit l'isomorphisme de Cartier

$$C^{-1} : \bigoplus_{0 \leq i < p} \Omega_{X'_0/k}^i \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i < p} \mathcal{H}^i F_* \Omega_{X_0/k}.$$

Suite à l'interprétation cristalline de ce morphisme (cf [HW13]), on en déduit un procédé pour obtenir algorithmiquement dans le cas d'une courbe hyperelliptique l'expression du Frobenius divisé modulo p . Plus précisément, on calcule la matrice A modulo p dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ adaptée à la filtration. Cette méthode est très explicite et a déjà utilisée dans le cas des courbes de Drinfeld (*loc. cit.*). Elle nécessite le choix d'un scindage (ou d'une base adaptée à la filtration), la connaissance d'un relèvement de l'endomorphisme de Frobenius modulo p^2 sur un recouvrement affine et utilise le complexe de Čech.

Rappelons la situation considérée ; P est un polynôme unitaire de $W[X]$ de degré impair $d = 2g + 1$, tel que P est séparable comme polynôme à coefficients dans K et tel que la classe de P dans $k[X]$, notée P_1 est aussi séparable.

La courbe X_0 sur k , fibre spéciale de X , est la réunion des deux ouverts affines

$$U_0 = \text{Spec } k[x, y]/y^2 - P_1(x),$$

$$V_0 = \text{Spec } k[x_1, t]/t^2 - Q_1(x_1),$$

où l'on a posé $Q_1(x_1) = x_1^{d+1}P_1(1/x_1) = x_1R_1(x_1)$, $t = y/x^{g+1}$ et $x_1 = 1/x$.

Notons $\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^\bullet)$ le complexe simple associé au bicomplexe de Čech du recouvrement $\mathcal{U} = (U_0, V_0)$. Le morphisme $\Omega_{X_0/k}^\bullet \rightarrow \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme

$$H_{dR}^1(X_0/k) \simeq H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^\bullet)).$$

4.3.1 Description de $H_{dR}^1(X_0/k)$

Dans cette section, nous allons construire un scindage de la filtration de Hodge, ce qui revient à construire un isomorphisme

$$H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \oplus H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \simeq H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^\bullet))$$

pour le recouvrement \mathcal{U} de X_0 formé par U_0 et V_0 .

Proposition 4.3.1.1. *Le k -espace vectoriel $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ a pour base la famille de classes $[h_i]$ où*

$$h_i = \frac{y}{x^i} = \frac{t}{x_1^{g+1-i}}, \text{ pour } 1 \leq i \leq g.$$

Démonstration. Utilisons le recouvrement de X_0 par les deux ouverts affines U_0 et V_0 ; alors $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ s'identifie aux classes des éléments h de $\mathcal{O}_{X_0}(U_0 \cap V_0)$ qui ne s'étendent à aucun des deux ouverts U_0 et V_0 , modulo la relation $h = f_U - f_V$, où f_U (respectivement f_V) est une fonction définie sur U_0 (respectivement sur V_0). Or, d'une part

$$\mathcal{O}_{X_0}(U_0 \cap V_0) = k[x, y, \frac{1}{x}] = k[x_1, t, \frac{1}{x_1}],$$

d'autre part, pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{y}{x^i} = \frac{t}{x_1^{g+1-i}}.$$

On en déduit que pour $1 \leq i \leq g$, les sections h_i ne s'étendent ni à U_0 , ni à V_0 . De plus elles forment un système linéairement indépendant sur k . \square

On a vu dans la proposition 3.2.1 que $H^0(X, \Omega_{X/W}^1)$ est le W -module libre de base les éléments $\omega_i = x^i \frac{dx}{y} = x_1^{g-1-i} \frac{dx_1}{t}$ pour $0 \leq i \leq g-1$. Puisque $H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1)$ s'identifie à la réduction modulo p de $H^0(X, \Omega_{X/W}^1)$, c'est un k -espace vectoriel de base $(\bar{\omega}_i)_{0 \leq i \leq g-1}$ réduction modulo p de la famille $(\omega_i)_{0 \leq i \leq g-1}$.

Le groupe de cohomologie $H_{DR}^1(X_0)$ s'identifie aux classes des éléments

$$(\omega_U, \omega_V, h) \in \Omega_{X_0/k}^1(U_0) \oplus \Omega_{X_0/k}^1(V_0) \oplus \mathcal{O}_{X_0}(U_0 \cap V_0)$$

tels que $\omega_V - \omega_U + dh = 0$, modulo les éléments de la forme $(dh_U, -dh_V, h)$ où $h = h_U + h_V$.

Proposition 4.3.1.2. (i) *L'image de $\omega \in H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1)$ dans $H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^\bullet))$ est la classe de $(\omega|_U, \omega|_V, 0)$.*

(ii) On peut construire algorithmiquement une application k -linéaire

$$\begin{aligned} s : H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) &\rightarrow H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^1)) \\ [h_i] &\mapsto [(\alpha_i^U, -\alpha_i^V, h_i)] \end{aligned}$$

où $\alpha_i^U \in \Omega_{X_0/k}^1(U_0)$ et $\alpha_i^V \in \Omega_{X_0/k}^1(V_0)$ vérifiant $dh_i = \alpha_i^U + \alpha_i^V$, qui soit un scindage de la filtration de Hodge.

Démonstration. Le premier point résulte de l'inclusion naturelle $H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \subset H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^1))$.

Pour démontrer le point (ii), pour $1 \leq i \leq d$, calculons

$$\begin{aligned} dh_i &= -i \frac{y^2}{x^{i+1}} \frac{dx}{y} + \frac{1}{x^i} dy \\ &= \left(\frac{-iP_1(x)}{x^{i+1}} + \frac{P_1'(x)}{2x^i} \right) \frac{dx}{y} \\ &= R_i(x) \frac{dx}{y} + S_i \left(\frac{1}{x} \right) \frac{dx}{y} \end{aligned}$$

où R_i et S_i sont des polynômes à coefficients dans k et val $S_i \geq 1$, ce qui assure l'unicité de la décomposition. On pose alors $\alpha_i^U = R_i(x) \frac{dx}{y}$ et $\alpha_i^V = S_i \left(\frac{1}{x} \right) \frac{dx}{y}$ et on définit par linéarité une application s qui à $[h_i]$ associe la classe de $(\alpha_i^U, -\alpha_i^V, h_i)$ dans $H^1(\check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}^1))$. □

Remarques 4.3.1.3.

(i) L'application ci-dessus repose sur un choix. En effet, pour une forme différentielle globale $\omega \in H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1)$, on peut écrire

$$dh_i = \left(R_i(x) \frac{dx}{y} + \omega \right) + \left(S_i \left(\frac{1}{x} \right) \frac{dx}{y} - \omega \right),$$

ce qui induit une autre section.

(ii) On remarque que pour $1 \leq i \leq g$, α_i^U est une section globale de $\Omega_{X_0}^1(2g\infty)$, ce qui fait le lien avec la proposition 3.2.6 et le corollaire 3.3.1.1. Rappelons que $(\omega_k)_{0 \leq k \leq 2g-1}$, où $\omega_k = x^k \frac{dx}{y}$ pour $0 \leq k \leq 2g-1$ forme une base de $(\Omega_{X_0}^1(2g\infty))^-$; si l'on note $(b_k)_{0 \leq k \leq 2g+1}$ les coefficients de P_1 , avec $b_{2g+1} = 1$, on obtient

$$\alpha_i^U = \sum_{k=i}^{2g} \frac{1}{2} (k-2i+1) b_{k+1} \omega_{k-i}.$$

4.3.2 Relèvement du Frobenius sur les ouverts affines

Considérons X_1 un relèvement de X_0 modulo p^2 également réunion de deux ouverts affines

$$U_1 = \text{Spec } W_2(k)[x, y]/y^2 - P_2(x),$$

$$V_1 = \text{Spec } W_2(k)[x_1, t]/t^2 - Q_2(x_1),$$

où P_2 est la réduction de P modulo p^2 et $Q_2(x_1) = x_1^{d+1}P_2(1/x_1) = x_1R_2(x_1)$, $t = y/x^{g+1}$ et $x_1 = 1/x$.

Le Frobenius de X_0 ne se relève pas globalement sur X_1 , mais on peut le relever sur chacun des deux ouverts affines U_1 et V_1 , ce qui permet de construire le morphisme de Deligne-Illusie via le complexe de Čech.

Proposition 4.3.2.1. *Il existe deux polynômes u et α à coefficients dans k tels qu'un relèvement de Frobenius sur U_1 soit déterminé par*

$$(i) \quad F_2(x) = x^p + m_p(u(x)) \text{ et } F_2(y) = y^p + y^p m_p(\alpha(x));$$

(ii) u et α sont reliés par la relation,

$$(P_2(T))^p - P_2^\sigma(T^p) = m_p(P_1'(T))^p u(T) - 2\alpha(T)(P_1(T))^p.$$

Démonstration. La suite exacte

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow W_2(k) \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

dont la première application m_p est la multiplication par p et la deuxième la réduction modulo p permet de se ramener à rechercher un relèvement du Frobenius sur U_1 de la forme

$$F_2(x) = x^p + m_p(u(x)) \text{ et } F_2(y) = y^p + m_p(u(y)),$$

où u est une application de $k[x, y]/y^2 - P_1(x)$ dans lui-même qui doit vérifier

$$y^{2p} + 2m_p(u(y))y^p = P_2^\sigma(x^p) + P_2'^\sigma(x^p)m_p(u(x)).$$

Ici, σ désigne le Frobenius sur $W_2(k)$ qui relève l'élévation à la puissance p sur k et pour un polynôme $Q(T) = \sum_{k=0}^n b_k T^k$, on pose $Q^\sigma(T) = \sum_{k=0}^n \sigma(b_k) T^k$. Le polynôme $(P_2(T))^p - P_2^\sigma(T^p)$ est un multiple de p dans $W_2(k)[T]$ et on l'écrit $(P_2(T))^p - P_2^\sigma(T^p) = m_p(\mathcal{P}(T))$, où $\mathcal{P}(T) \in k[T]$. La relation vérifiée par u est alors

$$\mathcal{P}(x) = P_1'^\sigma(x^p)u(x) - 2u(y)y^p.$$

Recherchons $u(y)$ sous la forme $u(y) = y^p \alpha(x)$ avec $\alpha(x) \in k[x]$. L'équation s'écrit

$$\mathcal{P}(x) = P_1'^\sigma(x^p)u(x) - 2\alpha(x)y^{2p} = (P_1'(x))^p u(x) - 2\alpha(x)(P_1(x))^p.$$

La condition de séparabilité sur P_1 assure que P_1 et P_1' sont premiers entre eux et le théorème de Bézout permet de conclure à l'existence de polynômes u et α . \square

De la même façon, sur V_1 , on obtient un relèvement du Frobenius $F_2(x_1) = x_1^p + m_p(v(x_1))$ et $F_2(t) = t^p + t^p m_p(\beta(x_1))$ avec la condition

$$\mathcal{Q}(x_1) = (Q_1'(x_1))^p v(x_1) - 2Q_1(x_1)^p \beta(x_1),$$

où $m_p(\mathcal{Q}(T)) = (Q_2(T))^p - Q_2^\sigma(T^p)$.

4.3.3 Frobenius divisé

Le choix d'un relèvement de Frobenius sur les deux ouverts affines U_1 et V_1 permet de construire un morphisme

$$f : \bigoplus_{0 \leq i < p} \Omega_{X'_0/k}^i[-i] \rightarrow F_* \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X_0/k}),$$

en suivant pas-à-pas la méthode [DI87].

En degré 0, $f : \mathcal{O}_{X'_0/k} \rightarrow F_* \mathcal{O}_{U_0} \oplus F_* \mathcal{O}_{V_0}$ est l'application σ -linéaire de k -algèbres qui envoie x sur x^p .

En degré 1, $f = (\omega_U, \omega_V, h) : \Omega_{X'_0/k}^1 \rightarrow F_* \Omega_{U_0/k}^1 \oplus F_* \Omega_{V_0/k}^1 \oplus F_* \mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$ est induite par l'application qui localement vérifie

$$\begin{aligned} f_U(dx) &= (x^{p-1} + u'(x))dx, \\ f_V(dx_1) &= (x_1^{p-1} + v'(x_1))dx_1 \\ h(dx) &= u(x) + x^{2p}v(x_1). \end{aligned}$$

Via le quasi-isomorphisme $\Omega_{X'_0/k} \simeq \check{C}(\mathcal{U}, \Omega_{X'_0/k})$ et la base $((\bar{\omega}_i)_{0 \leq i \leq g-1}, (s([h_i]))_{1 \leq i \leq g})$ de $H_{dR}^1(X'_0)$, on peut calculer explicitement l'expression du Frobenius divisé sur la cohomologie de X'_0

$$\bar{\Phi}_M : H^0(X'_0, \Omega_{X'_0/k}^1) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \simeq H_{dR}^1(X'_0/k) \rightarrow H^1(\check{C}(\mathcal{U}, F_* \Omega_{X_0/k})).$$

Image de $\bar{\omega}_i$ par $\bar{\Phi}_M$ Posons

$$\begin{aligned} f(\bar{\omega}_i) &= (f_U(\bar{\omega}_i), f_V(\bar{\omega}_i), h(\bar{\omega}_i)) \\ &= \left(x^{ip} \frac{x^{p-1} + u'(x)}{y^{p-1}} \frac{dx}{y}, -x_1^{p(g-1-i)} \frac{x_1^{p-1} + v'(x_1)}{t^{p-1}} \frac{dx_1}{t}, x^{ip} \frac{u(x) + x^{2p}v(x_1)}{y^p} \right). \end{aligned}$$

Lemme 4.3.3.1. $f(\bar{\omega}_i) \in F_* \Omega_{U_0/k}^1 \oplus F_* \Omega_{V_0/k}^1 \oplus F_* \mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$ et vérifie

$$f_V(\bar{\omega}_i) - f_U(\bar{\omega}_i) + d(h(\bar{\omega}_i)) = 0.$$

Démonstration. En effet, le polynôme dérivé de \mathcal{P} s'exprime simplement de deux manières

$$\mathcal{P}'(T) = (P_1(T))^{p-1} P_1'(T) - T^{p-1} (P_1'(T))^p = (P_1'(T))^p u'(T) - 2\alpha'(T) (P_1(T))^p$$

et l'on en déduit la relation

$$(u'(T) + T^{p-1})(P_1'(T))^p = (P_1(T))^p (P_1'(T) + 2\alpha'(T)P_1(T)).$$

Puisque P_1 et P_1' sont premiers entre eux, $(P_1(T))^p$ divise le polynôme $u'(T) + T^{p-1}$, ce qui permet de conclure que

$$\frac{x^{p-1} + u'(x)}{y^{p-1}} \in \mathcal{O}_{U_0}.$$

Le même raisonnement s'applique à la forme différentielle sur V_0 .

Pour ce qui concerne la fonction sur $U_0 \cap V_0$, on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(T) &= T^{p(d+1)} \mathcal{Q} \left(\frac{1}{T} \right) \\
&= T^{p(d+1)} \left(\left(Q_1' \left(\frac{1}{T} \right) \right)^p v \left(\frac{1}{T} \right) - 2\beta \left(\frac{1}{T} \right) \left(Q_1 \left(\frac{1}{T} \right) \right)^p \right) \\
&= ((d+1)^p T^p (P_1(T))^p - T^{2p} (P_1'(T))^p) v \left(\frac{1}{T} \right) - 2\beta \left(\frac{1}{T} \right) (P_1(T))^p \\
&= (P_1'(T)) u(T) - 2\alpha(T) (P_1(T))^p,
\end{aligned}$$

ce qui nous fournit une relation

$$(P_1'(T))^p \left(u(T) + X^{2p} v \left(\frac{1}{T} \right) \right) = (P_1(T))^p (2\alpha(T) + (d+1)^p T^p v \left(\frac{1}{T} \right) - 2\beta \left(\frac{1}{T} \right))$$

et permet de conclure. □

Explicitons à présent la décomposition de la classe de $f(\bar{\omega}_i)$ dans $H^1(\check{C}(\mathcal{U}, F_* \Omega_{X_0/k}^1))$ en fonction de la somme directe $H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1) \oplus s(H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0})) = H_{DR}^1(X_0/k)$.

Ecrivons $[(\beta_i^U, -\beta_i^V, \bar{h}(\bar{\omega}_i))]$ l'image de $[h(\bar{\omega}_i)]$ par s (cf. proposition 4.3.1.2) et posons

$$\Phi_i = (x^{ip} \frac{x^{p-1} + u'(x) dx}{y^{p-1}} \frac{dx}{y} - \beta_i^U, -x_1^{p(g-1-i)} \frac{x_1^{p-1} + v'(x_1) dx_1}{t^{p-1}} \frac{dx_1}{t} + \beta_i^V, 0).$$

Corollaire 4.3.3.2. Avec les notations ci-dessus, $\Phi_i \in H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1)$ et

$$\bar{\Phi}_M(\bar{\omega}_i) = \Phi_i + s([h(\bar{\omega}_i)]).$$

Cette décomposition est la décomposition adaptée au scindage de la filtration de Hodge s .

Démonstration. On vérifie que

$$x^{ip} \frac{x^{p-1} + u'(x) dx}{y^{p-1}} \frac{dx}{y} - \beta_i^U - (x_1^{p(g-1-i)} \frac{x_1^{p-1} + v'(x_1) dx_1}{t^{p-1}} \frac{dx_1}{t} + \beta_i^V) = f_U(\bar{\omega}_i) - f_V(\bar{\omega}_i) + dh(\bar{\omega}_i) = 0;$$

une section globale de $\Omega_{X_0/k}^1$ est ainsi définie. □

Remarque. Il suffit alors de déterminer les composantes de $\bar{\Phi}_M(\bar{\omega}_i)$ dans la base $((\bar{\omega}_i)_{0 \leq i \leq g-1}, (s([h_i]))_{1 \leq i \leq g})$ pour obtenir g colonnes de la matrice.

Image de $[h_i]$ par $\bar{\Phi}_M$ On a vu que $f(h_i) = h_i^p$ et $(0, 0, h_i^p)$ est un cocycle par le fait que $d(h_i^p) = 0$. Pour $1 \leq i \leq g$, écrivons $s([h_i^p]) = (\eta_i^U, -\eta_i^V, \bar{h}(h_i^p))$ et $h_i^p - \bar{h}(h_i) = h_U + h_V$, où h_U est une fonction définie sur U (obtenue comme combinaison linéaire à coefficients dans k des fonctions $\frac{y}{x^i}$ pour $i \leq 0$ et h_V une fonction définie sur V (combinaison des fonctions $\frac{y}{x^i}$ pour $i \geq g+1$). Alors

$$(0, 0, h_i^p) = s([h_i^p]) + (-dh_U - \eta_i^U, dh_V + \eta_i^V, 0) + (dh_U, -dh_V, h_U + h_V).$$

Posons $\Psi_i = (-dh_U - \eta_i^U, dh_V + \eta_i^V, 0)$.

Corollaire 4.3.3.3. Avec les notations ci-dessus, $\Psi_i \in H^0(X_0, \Omega_{X_0/k}^1)$ et

$$\overline{\Phi}_M([h_i]) = \Psi_i + s([h_i^p])$$

est la décomposition adaptée au scindage de la filtration de Hodge s .

Remarque. Comme ci-dessus, en déterminant les composantes de $\overline{\Phi}_M(\bar{\omega}_i)$ dans la base $((\bar{\omega}_i)_{0 \leq i \leq g-1}, (s([h_i]))_{1 \leq i \leq g})$, on obtient les dernières g colonnes de la matrice A recherchée.

4.3.4 Complexité de l'algorithme

Notons n le degré de l'extension k sur \mathbf{F}_p .

La complexité de l'algorithme de Kedlaya pour calculer la matrice du Frobenius sur $H_{DR}^1(X_K)$ indiquée dans [Ked01] est $O(g^{4+\varepsilon}n^{3+\varepsilon})$. Une fois la matrice trouvée, il faut encore un changement de base pour déterminer la matrice dans une base du réseau $H_{DR}^1(X)$.

Les calculs présentés dans les sections 4.3.2 et 4.3.3 mènent à un algorithme, qui détermine directement la matrice modulo p du Frobenius divisé dans une base adaptée à la filtration de $H_{DR}^1(X)$. Interviennent des multiplications et additions de polynômes de degré $\leq p(2g+1)$, ainsi que l'algorithme d'Euclide étendu, appliqué à des polynômes de degré $\leq p(2g+1)$. On obtient une complexité de $O(n^{2+\varepsilon}g^{2+\varepsilon})$.

Références

- [BC94] Francesco Baldassarri and Bruno Chiarellotto. Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients. In *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*, volume 15 of *Perspect. Math.*, pages 11–50. Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [Bou83] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*. Masson, Paris, 1983.
- [DI87] Pierre Deligne et Luc Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Invent. Math.*, 89(2) :247–270, 1987.
- [Edi03] Bas Edixhoven. Point counting after kedlaya. eidma-stieltjes graduate course, 2003.
- [FM87] Jean-Marc Fontaine and William Messing. p -adic periods and p -adic étale cohomology. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

- [Fon83] Jean-Marc Fontaine. Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adiques. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 of *Lecture Notes in Math.*, pages 86–108. Springer, Berlin, 1983.
- [Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p -adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p -adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [Har66] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [HW13] Christine Huyghe et Nathalie Wach. Interprétation cristalline de l’isomorphisme de deligne-illusie (cas des courbes). *soumis pour publication*, pages 1–48, 2013.
- [Kat73] Nicholas M. Katz. p -adic properties of modular schemes and modular forms. In *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, pages 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350. Springer, Berlin, 1973.
- [Ked01] Kiran S. Kedlaya. Counting points on hyperelliptic curves using Monsky-Washnitzer cohomology. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 16(4) :323–338, 2001.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, 2002.
- [Maz73] B. Mazur. Frobenius and the Hodge filtration (estimates). *Ann. of Math. (2)*, 98 :58–95, 1973.
- [vdB08] Theo van den Bogaart. About the choice of a basis in Kedlaya’s algorithm. <http://arxiv.org/abs/math/0505178v3>, pages 1–19, 2008.
- [Wac97] Nathalie Wach. Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2) :185–240, 1997.
- [Wal11] George Walker. About the choice of a basis in Kedlaya’s algorithm. <http://arxiv.org/abs/1110.4049>, pages 1–18, 2011.

Christine Huyghe et Nathalie Wach
 IRMA
 Université Louis Pasteur

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG cedex FRANCE

mél huyghe@math.unistra.fr, wach@math.unistra.fr, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe>, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~wach>