Interprétation cristalline de l'isomorphisme de Deligne-Illusie (cas des courbes)*

C. Huyghe et N. Wach

16 avril 2013

Abstract

In 1987, Deligne and Illusie proved the degeneration of the spectral sequence "de Hodge vers de Rham" in a purely algebraic way, by constructing a quasi-isomorphism at the level of derived categories between the de Rham complex of smooth schemes in car. $p > 0$ of dimension $< p$ with a complex with 0 differentials. We give here a crystalline version of this morphism for projective curves and show that the two morphisms are compatible. As an application of this compatibility, we compute the (φ, Γ)-module $mod\, p$ associated to the Drinfeld Curve.

Résumé

En 1987, Deligne et Illusie ont démontré la dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham d'une façon purement algébrique, en construisant un quasi-isomorphisme dans la catégorie dérivée entre le complexe de de Rham d'un schéma lisse en car. $p > 0$, de dimension $< p$ et un complexe à différentielles nulles. Nous donnons ici une version cristalline de ce morphisme pour les courbes projectives et montrons que les deux morphismes sont compatibles. Comme application de cette compatibilité, nous calculons le (φ, Γ)-module $mod\, p$ associé à la courbe de Drinfeld.

Table des matières

*Les deux auteurs ont bénéficié du soutien du projet CETHop : ANR-09-JCJC-0048-01, coordonné par Xavier Caruso, projet de l'Agence Nationale de la Recherche.

MSC classification 2010 : 11S23, 14F30, 14F40

Introduction

Soient k un corps fini, de caractéristique p différent de 2, $W = W(k)$, X_0 un schéma lisse sur *spec* k de dimension D, qui se relève en un schéma lisse X_1 sur W/p^2. Si l'on note X_0' le changement de base par le Frobenius F du schéma X_0, DR_{X_0} le complexe de de Rham de X_0, Deligne et Illusie ont montré qu'il existe un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathcal{O}_{X_0'}$-modules :

$$DI\ :\ \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X_0'}[-i] \to F_* DR_{X_0},$$

qui, par passage à la cohomologie, induit l'isomorphisme de Cartier pour $i < p$. Une conséquence spectaculaire de ce résultat fut une démonstration algébrique de la dégénerescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham pour un schéma propre et lisse sur un corps de caractéristique 0. Simultanémenent, Fontaine et Messing [FM87], ont donné une construction dans le cadre de la cohomologie syntomique de ce morphisme de décomposition, mais sans comparer avec le morphisme de Deligne-Illusie. Ensuite Breuil [Bre98], a donné une version log-syntomique de ce morphisme, sans comparer non plus sa construction avec celle de Deligne-Illusie.

Rappelons que la construction de Deligne-Illusie repose sur deux étapes. D'abord on construit une flèche $DI^{\leq 1}$ dans la catégorie dérivée du complexe tronqué $\mathcal{O}_{X_0'} \bigoplus \Omega^1_{X_0'}[-1]$ vers $F_* DR_{X_0}$. Ensuite, on utilise cette flèche pour construire le morphisme de Deligne-Illusie.

Nous regardons ici une situation techniquement plus simple en nous plaçant dans le cas où X_0 est projectif, et en donnant une version cristalline $\Phi^{\leq 1}$ du morphisme de Deligne-Illusie tronqué pour $i \leq 1$, dont nous montrons qu'il coïncide, en un sens qui sera précisé en 2.4, avec celui de Deligne-Illusie (tronqué pour $i \leq 1$).

Si X_0 est une courbe projective lisse, qui se relève sur spec W, nous montrons ainsi que le morphisme de Deligne-Illusie provient d'un morphisme cristallin. Ceci nous permet de démontrer que le morphisme de Deligne-Illusie est bien, *mod* p, le morphisme de Frobenius divisé défini par Mazur dans [Maz73] sur la cohomologie de de Rham de X. Or, la simplicité technique de la construction de Deligne-Illusie a une conséquence pratique importante, qui est que cette application est complètement calculable dans certains cas explicites. C'est d'ailleurs cette observation qui a motivé notre travail : un calcul cristallin analogue serait hors de portée. Prenons l'exemple de la courbe de Drinfeld, dont Haastert et Jantzen ont calculé la cohomologie cristalline dans [HJ90]. En nous appuyant sur leur calcul, nous pouvons calculer, grâce à une méthode due à Wach, le (φ, Γ)-module $mod\, p$ associé à cette courbe, ce qui est équivalent à la description comme représentation galoisienne de la réduction $mod\, p$, de la cohomologie étale de $X_{\overline{K}}$ à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$ (où $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K). Il apparaît alors que l'action de Γ est diagonalisable, ce qui simplifie le calcul. Notre résultat montre ainsi que la construction de Deligne-Illusie a des applications tout à fait concrètes. Au passage nous voyons aussi que cette courbe n'est pas ordinaire.

Après une première partie de notations, nous démontrons le théorème de comparaison dans la deuxième partie de cet article. Il faut d'abord construire le morphisme $\Phi^{\leq 1}$ cristallin, ce qui fait l'objet de la section 2. Pour comparer avec le morphisme de Deligne-Illusie (section 3), il faut calculer $\Phi^{\leq 1}$ par descente cohomologique, via un complexe que nous notons $K^\bullet$. L'argument clé pour mener à bien le théorème de comparaison est que l'on peut construire une vraie flèche de complexes $\mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \to K^\bullet$, qui commute aux morphismes de descente cohomologique (cf. 3.3.3). Le théorème de comparaison n'est donc pas complètement formel à partir de la définition de $\Phi^{\leq 1}$. Dans la section 4, nous comparons avec la construction de Mazur pour les courbes. Dans la section 5, nous menons le calcul explicite pour le cas des courbes de Drinfeld, en donnant un algorithme et le (ϕ, Γ)-module.

La construction de Deligne-Illusie, bien que simple, peut paraître miraculeuse. Il n'en est finalement rien puisque celle-ci provient du Frobenius divisé cristallin, que l'on peut calculer de façon systématique en utilisant une résolution simpliciale de la courbe X. Au moins pour les courbes, la construction de Deligne-Illusie s'obtient donc en « aplatissant »cette flèche cristalline, au niveau de résolutions de Čech des différents faisceaux considérés.

Pour les courbes hyperelliptiques, d'autres méthodes existent pour calculer la réduction $mod\, p^n$ du (φ, Γ)-module associé à la cohomologie étale de $X_{\overline{K}}$, qui font appel à des calculs de cohomologie rigide tels qu'initiés par Kedlaya [Ked01] et à l'algorithme de Wach [HW13]. L'approche via le morphisme de Deligne-Illusie est différente, sans doute plus générale, mais ne fournit qu'un résultat $mod\, p$.

Nous tenons à remercier, pour avoir répondu avec gentillesse et précision à nos questions concernant ce sujet : Christophe Breuil, Jean-Marc Fontaine, Luc Illusie et Arthur Ogus. Nous remercions aussi Michel Gros de nous avoir signalé l'article de Haastert-Jantzen [HJ90], ainsi que Pierre Berthelot et Bernard le Stum pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail.

1 Notations

Rappelons que p est un nombre premier différent de 2, k est un corps fini de caractéristique $p > 0$. Nous noterons $W = W(k)$, $W_n = W/p^nW$, $S = \text{spec } W$, $S_0 = \text{spec } k$, $S_n = \text{spec } W_{n+1}$. Dans ce texte, X_0 est un schéma projectif lisse sur S_0, qui admet un relèvement projectif, lisse X_1 sur S_1, i.e. modulo p^2. On fixe $a_0 : X_0 \hookrightarrow X_1$.

Si Y est un schéma sur W, Y_n sera le schéma $Y_n = \text{spec}\, W_n \times_{\text{spec } W} Y$.

Etant donné une immersion fermée : $X_0 \hookrightarrow Y_n$ de X_0 dans un S_n-schéma lisse Y_n, nous noterons $\mathcal{P}(Y_n)$ l'enveloppe à puissances divisées de l'idéal de cette immersion et J_{Y_n} le PD-idéal de $\mathcal{P}(Y_n)$. L'algèbre $\mathcal{P}(Y_n)$ est filtrée par les puissances divisées de l'idéal J_{Y_n} : $J_{Y_n}^{[k]}$ est l'idéal engendré par les éléments $x_1^{[a_1]} \cdots x_r^{[a_r]}$ tels que les entiers naturels a_i vérifient $a_1 + \ldots + a_r \geq k$. En particulier, on a l'égalité $J_{Y_n} = J_{Y_n}^{[1]}$. On omettra le Y_n en indice quand le contexte sera clair.

La lettre grecque σ désignera à la fois le Frobenius sur k, et aussi son relevé sur W ou W_n pour tout $n \geq 0$. Si Y_0 est un k-schéma, F_{Y_0} sera le Frobenius absolu sur Y_0, $Y_0' = Y_0 \times_{spec\, k} spec\, k$, le changement de base par le Frobenius sur k, et F sera le Frobenius relatif habituel : $Y_0 \to Y_0'$. De façon abusive, nous noterons aussi F le morphisme induit par $F : F^{-1}\mathcal{O}_{Y_0'} \to \mathcal{O}_{Y_0}$.

En général, si Y_n est un schéma sur S_n, Y_n' sera le produit fibré par le morphisme σ :

$$Y_n' = Y_n \times_{S_n} S_n.$$

Si $\mathcal{E}$ est un faisceau de W_{n+1}-modules libres sur un S_n-schéma, on notera m_p (resp. m_p^{-1}) l'isomorphisme de multiplication par p, $m_p :\ \mathcal{E}/p^n\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} p \cdot \mathcal{E}$, (resp. m_p^{-1} son isomorphisme inverse). Si u est un morphisme de faisceaux W_{n+1}-linéaire : $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$, le diagramme suivant est bien entendu commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/p^n\mathcal{E} \arrow[r, "\sim", "m_p"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & p \cdot \mathcal{E}, \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{F}/p^n\mathcal{F} \arrow[r, "\sim", "m_p"'] & p \cdot \mathcal{F},
\end{tikzcd}$$

ce qui revient à dire que $m_p^{-1} \circ u = u \circ m_p^{-1}$.

Si Z est un S-schéma (resp. S_n-schéma), on notera Ab_Z la catégorie des faisceaux de groupes abéliens pour la topologie Zariski sur Z et $D^b(Ab_Z)$ la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de Ab_Z. On notera aussi $D^b(Ab_Z)$ la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée des faisceaux de $\mathcal{O}_Z$-modules cohérents.

Les conventions pour les complexes (indexés par $\mathbf{Z}$) sont les suivantes : si $K^\bullet$ est un complexe de modules, et $a \in \mathbf{Z}$, alors $(K^\bullet[a])^j = K^{j+a}$. Le tronqué cohomologique $\sigma_{\leq a} K^\bullet$

est le complexe :

$$\cdots \to K_{a-1} \to K_a \to Ker(d_{a+1}) \to 0 \cdots .$$

Soient maintenant $K^{\bullet,\bullet}$ un bi-complexe de modules tel que $K^{i,j} = 0$ si $i \leq i_0$ et $j \leq j_0$ pour un certain couple (i_0, j_0), et dont les différentielles horizontales et verticales sont notées respectivement d' et d''. Alors le complexe simple associé sera noté $[K^{\bullet,\bullet}]_s$ et a pour terme général $[K^{\bullet,\bullet}]_s^{\ n} = K^n = \bigoplus_{i+j=n} K^{i,j}$ et pour différentielle pour $x \in K^{i,j}$, $d(x) = d'(x) + (-1)^i d''(x)$.

Nous serons amenés à considérer dans la suite les sites cristallins X_0/S_n, dont on notera $\mathcal{O}_{X_0/S_n}$ le faisceau structural, défini par

$$\mathcal{O}_{X_0/S_n}(T) = \mathcal{O}_T,$$

si $U \hookrightarrow T$ est un épaississement de U, c'est-à-dire une immersion fermée définie par un idéal à puissances divisées (PD-idéal) $J_U = Ker(\mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_U)$. Ces idéaux forment le faisceau de PD-idéaux $\mathcal{J}_{X_0/S_n}$. On notera $\mathcal{J}_{X_0/S_n}^{[k]}$ le k-ième terme de la filtration PD-adique et on notera u la projection sur le site zariskien

$$(X_0/S_n)_{cris} \to (X_0/S_n)_{Zar}.$$

Nous aurons aussi besoin de l'application suivante définie sur $\mathbf{Z}$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$. Si $j \geq 1$,

$$\langle j \rangle = inf_{i \geq j} v_p \left(\frac{p^i}{i!} \right),$$

et $\langle j \rangle = 0$ pour $j \leq 0$. Nous faisons alors l'observation :

Lemme 1.1. *i Pour tout nombre premier p et tout $j \geq 1$, $\langle j \rangle \geq 1$.*

ii Pour tout nombre premier $p \neq 2$, et tout $j \geq 2$, $\langle j \rangle \geq 2$.

Démonstration. Si $\sigma(i)$ désigne la somme des chiffres de i écrit en base p, alors

$$\begin{aligned} v_p \left(\frac{p^i}{i!} \right) &= \frac{\sigma(i)}{p-1} + i \frac{(p-2)}{p-1} \\ &\geq \frac{p-2}{p-1} + \frac{1}{p-1} \geq 1 \ \text{ si } i \geq 1, \end{aligned}$$

Ce qui montre le (i). D'autre part, on a si $i \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_p \left(\frac{p^i}{i!} \right) &\geq \frac{1}{p-1} + 2 \frac{(p-2)}{p-1} \\ &\geq 1 + \frac{p-2}{p-1} \\ &> 1 \end{aligned}$$

de sorte que cette quantité, qui est un nombre entier relatif, est supérieure à 2 si $i \geq 2$, ce qui montre (ii). □

2 Construction du morphisme $\Phi^{\leq 1}$ cristallin

2.1 Généralités

Supposons que X_0 se plonge dans un schéma projectif Y_n, de dimension N, lisse sur S_n. muni d'un relèvement $F : Y_n \to Y'_n$ du morphisme de Frobenius relatif sur la fibre spéciale Y_0 (on peut par exemple prendre pour Y un espace projectif sur S_n). L'hypothèse que X_1 est projectif intervient ici pour pouvoir calculer le Frobenius cristallin par plongement de X_1 dans un schéma lisse sur S_1, sur lequel on dispose d'un relèvement du Frobenius, ce qui n'est pas garanti sans cette hypothèse.

Définition 2.1.1. *On appelle réalisation de $Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_n}$ tout complexe de $D^b(Ab_{Y_n})$ qui est quasi-isomorphe à $Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_n}$.*

Considérons la réalisation de $Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_n}$ suivante

$$\mathcal{E}_{Y_n} \;:\; 0 \to \mathcal{P}(Y_n) \to \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^1_{Y_n} \to \cdots \to \mathcal{P}(Y_n) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^N_{Y_n} \to 0, \tag{1}$$

dont la différentielle est obtenue à partir du fait que $d(x^{[a]}) = x^{[a-1]}dx$ pour toute section locale x de l'idéal à puissances divisées J de $\mathcal{P}(Y_n)$. Le relèvement du Frobenius sur Y_n induit un morphisme de Frobenius $F : \mathcal{E}_{Y'_n} \to F_*\mathcal{E}_{Y_n}$ et on dispose des estimations de Mazur ([Maz73])

$$\forall k \geq 0,\; F(J^{[k]}_{Y'_n}\mathcal{P}(Y'_n)) \subset p^{\langle k \rangle}\mathcal{P}(Y_n). \tag{2}$$

De plus, $F(\Omega^i_{Y'_n}) \subset p^i \cdot \Omega^i_{Y_n}$ pour tout entier naturel i.

On rappelle de plus que l'on dispose dans $D^-(Ab_{Y_n})$ d'un quasi-isomorphisme *can* : $Ru_{X_0*}\mathcal{J}^{[m]}_{X_0/S_n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{[m]}_{Y_n}$, où $\mathcal{L}^{[m]}_{Y_n}$ est le complexe de faisceaux Zariski sur X_0,

$$\mathcal{L}^{[m]}_{Y_n} \;:\; 0 \to J^{[m]} \to J^{[m-1]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^1_{Y_n} \to \cdots \to J^{[m-N]} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \Omega^N_{Y_n} \to 0.$$

Nous aurons besoin d'un énoncé analogue pour le faisceau $\mathcal{J}_{X_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0/S_1}$.

Proposition 2.2. *Supposons que l'on ait une immersion fermée $\alpha : X_0 \hookrightarrow Y_1$, où Y_1 est un S_1-schéma lisse.*

i Dans la catégorie $D^-(Ab_{Y_1})$, il existe un quasi-isomorphisme can : $Ru_{X_0/S_1*}(\mathcal{J}_{X_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0/S_1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{[1]}_{Y_1}/\mathcal{L}^{[2]}_{Y_1}$. De plus, le complexe $\mathcal{M}^{[1]}_{Y_1} = \mathcal{L}^{[1]}_{Y_1}/\mathcal{L}^{[2]}_{Y_1}$ est à cohomologie en degrés 0 et 1 et est donné par :

$$\mathcal{M}^{[1]}_{Y_1} \;:\; 0 \to J_{Y_1}/J^{[2]}_{Y_1} \to \alpha^*\Omega^1_{Y_1} \to 0.$$

ii A tout diagramme commutatif de S_1-schémas

$$\begin{tikzcd} & & Z_1 \arrow[d, "h"] \\ X_0 \arrow[urr, hook, "\beta"] \arrow[rr, "\alpha"'] & \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_1, \end{tikzcd}$$

où Y_1 et Z_1 sont lisses, correspond un quasi-isomorphisme canonique : $\mathcal{M}_{Y_1}^{[1]} \to \mathcal{M}_{Z_1}^{[1]}$.

Remarque. La $\mathcal{O}_{X_0}$-linéarité de la différentielle d_0 du complexe $\mathcal{M}_{Y_1}^{[1]}$ entraîne que l'on travaille en fait avec des complexes de $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$, ce que nous ferons dans la suite.

Démonstration. D'après la démonstration de 6.12 de [BO78], ces complexes sont obtenus en appliquant le foncteur Ru_{X_0/S_1*} aux complexes de faisceaux linéarisés sur le site cristallin (X_0/S_1), dont le terme de degré q, noté K_q^m, est égal à $F^m(L(\mathcal{P}(Y_1) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \Omega_{Y_1}^q))$ pour $m = 1$ et $m = 2$. Comme ces complexes sont acycliques pour u_{X_0/S_1*} (5.27.2 de loc. cit.), on observe que $u_{X_0*}(K_q^m) = F^m(\mathcal{P}(Y_1) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \Omega_{Y_1}^q)$. De plus, les quotients K_q^m/K_q^{m+1} sont aussi acycliques pour u_{X_0/S_1*} par la suite exacte longue de cohomologie. Le quotient $\mathcal{J}_{X_0/S_1}/\mathcal{J}_{X_0/S_1}^{[2]}$ est ainsi quasi-isomorphe au complexe de terme général K_q^1/K_q^2, qui est à termes acycliques pour u_{X_0/S_1*}. On en déduit que $Ru_{X_0/S_1*}(\mathcal{J}_{X_0/S_1}/\mathcal{J}_{X_0/S_1}^{[2]})$ est quasi-isomorphe au complexe de terme général $u_{X_0/S_1*}(K_q^1/K_q^2) \simeq u_{X_0/S_1*}(K_q^1)/u_{X_0/S_1*}(K_q^2)$, et donc au complexe $\mathcal{L}_{Y_1}^{[1]}/\mathcal{L}_{Y_1}^{[2]}$, soit encore au complexe

$$0 \to J_{Y_1}/J_{Y_1}^{[2]} \to \mathcal{P}(Y_1)/J_{Y_1} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \Omega_{Y_1}^1 \to 0.$$

On remarque que $\mathcal{P}(Y_1)/J_{Y_1}^{[1]}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_0}$, ce qui donne le i de l'énoncé.

Le (ii) provient de la fonctorialité des résolutions $\mathcal{L}_{Y_n}^{[m]}$, qui fournit des quasi-isomorphismes de complexes (V, corollaire 2.3.5 de [Ber74]). L'application induite entre $\mathcal{M}_{Y_1}^{[1]}$ et $\mathcal{M}_{Z_1}^{[1]}$ provient des morphismes canoniques $J_{Y_1} \to J_{Z_1}$ et $\alpha^*\Omega_{Y_1}^1 \to \beta^*\Omega_{Z_1}^1$. Et comme $\mathcal{M}_{Y_1}^{[1]} = \mathcal{L}_{Y_1}^{[1]}/\mathcal{L}_{Y_1}^{[2]}$ (resp. pour Z_1), l'application obtenue est un quasi-isomorphisme. □

2.3 Calcul dans des cas particuliers

Rappelons que par hypothèse, X_0 admet un relèvement projectif lisse X_1 sur S_1, qui est fixé. Supposons que X_1 se plonge dans un schéma lisse Y_1, via une immersion i de faisceaux d'idéaux réguliers L. On note α l'immersion composée : $X_0 \overset{a_0}{\hookrightarrow} X_1 \overset{i}{\hookrightarrow} Y_1$. On suppose qu'il existe une section s_e au morphisme canonique $i^{-1}\mathcal{O}_{Y_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$. Cette section permet de munir l'algèbre $\mathcal{P}(Y_1)$ d'une structure de $\mathcal{O}_{X_1}$-module, que l'on fixera dans la suite de ce paragraphe. Soient d le morphisme canonique $L/L^2 \to i^*\Omega_{Y_1}^1$, $\overline{L} = a_0^*L$, et $\overline{d} : \overline{L}/\overline{L}^2 \to \alpha^*\Omega_{Y_1}^1$, le morphisme déduit de d par réduction $mod\, p$. On note encore $\overline{s}_e : i^{-1}\mathcal{O}_{Y_0} \to \mathcal{O}_{X_0}$, le morphisme déduit de s_e. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Sous les hypothèses ci-dessus,*

i *le complexe* $\mathcal{M}^{[1]}_{Y_1}$ *est quasi-isomorphe au complexe de* $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$

$$0 \to \mathcal{O}_{X_0} \oplus \overline{L}/\overline{L}^2 \to \alpha^*\Omega^1_{Y_1} \to 0,$$

dont la différentielle d_0 *est* $\mathcal{O}_{X_0}$*-linéaire et est donnée, pour* $(a,b) \in \mathcal{O}_{X_0} \times \overline{L}/\overline{L}^2$ *par* $d_0(a+b) = \overline{d}(b)$*,*

ii *en particulier, on dispose d'un morphisme de complexes* $\mathcal{O}_{X_0} \to \mathcal{M}^{[1]}_{Y_1}$*.*

iii *Etant donné un diagramme commutatif de* S_1 *schémas lisses* Y_1*,* Z_1

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[d, "h"] \\
X_1 \arrow[ur, hook, "j"] \arrow[r, "i"] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & Y_1,
\end{tikzcd}$$

on note $\beta = j \circ a_0$*,* $\alpha = i \circ a_0$*,* $\overline{M}$ *la réduction* $\bmod p$ *du faisceau d'idéaux* M *de l'immersion* $X_1 \hookrightarrow Z_1$*. On dispose alors d'un morphisme canonique de complexes, qui est un quasi-isomorphisme de* $D^b(\mathcal{O}_{X_0})$ *:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X_0} \oplus \overline{L}/\overline{L}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \alpha^*\Omega^1_{Y_1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X_0} \oplus \overline{M}/\overline{M}^2 \arrow[r] & \beta^*\Omega^1_{Z_1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Commençons par (ii). L'algèbre $\mathcal{P}(Y_1)$ est aussi la PD-algèbre de l'idéal L, de sorte que cette algèbre contient le PD-idéal K engendré par les éléments de L. Ainsi on a la relation $J_{Y_1} = p\mathcal{P}(Y_1) + K$. Soit $\mathcal{W}$ un ouvert de Y_1 tel que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ est une suite régulière de générateurs de L. Alors pour tout $\underline{k}$ tel que $|\underline{k}| \geq 1$, les éléments $p\tau_i^{[k]}$ sont dans $J^{[2]}_{Y_1}$, de même que p^2, si bien que l'idéal $J_{Y_1}/J^{[2]}_{Y_1}$ est annulé par p. On dispose d'une flèche évidente $L/L^2 \to K/K^{[2]}$ qui donne une flèche $\overline{L}/\overline{L}^2 \to J_{Y_1}/J^{[2]}_{Y_1}$. On dispose d'autre part d'une flèche $\mathcal{O}_{X_0} \overset{m_p}{\simeq} p\mathcal{O}_{X_1} \to p\mathcal{P}(Y_1)$. On a ainsi une flèche $s : \mathcal{O}_{X_0} \oplus \overline{L}/\overline{L}^2 \to J_{Y_1}/J^{[2]}_{Y_1}$. Il suffit de vérifier localement, sur un ouvert $\mathcal{W}$ de Y_1 sur lequel $\tau_1, \ldots, \tau_n$ est une suite régulière de générateurs de L, que s est un isomorphisme. En utilisant la section s_e on a les identifications suivantes

$$\mathcal{P}(Y_1) \simeq \bigoplus_{\underline{k}} \mathcal{O}_{X_1}\underline{\tau}^{[\underline{k}]},\ K \simeq \bigoplus_{|\underline{k}| \geq 1} \mathcal{O}_{X_1}\underline{\tau}^{[\underline{k}]},$$

$$K/K^{[2]} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_1}\tau_i,$$

ce qui montre que $K/K^{[2]}$ est isomorphe à L/L^2. D'autre part, $J_{Y_1}/J_{Y_1}^{[2]}$ est isomorphe sur $\mathcal{W}$ à $p\mathcal{O}_{X_1} \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_0}\tau_i$, et donc au module $\mathcal{O}_{X_0} \oplus \overline{L}/\overline{L}^2$.

La vérification de l'expression de d_0 peut aussi se faire localement. Comme rappelé en 2.1, si $\tau \in \overline{L}$, $d_0(\tau) = \overline{d}(\tau)$. D'autre part, comme $\mathcal{O}_{X_0}$ s'envoie dans $\mathcal{P}(Y_1)$ via la multiplication par p, m_p, la différentielle s'annule sur $p\mathcal{O}_{X_1}$, donc d_0 s'annule sur $\mathcal{O}_{X_0}$, ce qui nous donne l'expression voulue de d_0. Il reste à vérifier la $\mathcal{O}_{X_0}$-linéarité de d_0. Si $b \in \mathcal{O}_{X_0}$, $\tau \in \overline{L}$, on calcule

$$d_0(b\tau) = \overline{s}_e(b)\overline{d}(\tau) + \tau\overline{d}(\overline{s}_e(b)) \in \mathcal{P}(Y_0) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \Omega^1_{Y_0}.$$

Or, $\tau\overline{d}(\overline{s}_e(b)) \in \overline{L} \otimes \Omega^1_{Y_0}$, ce qui finalement donne

$$d_0(b\tau) = b \cdot d_0(\tau) \in \alpha^*\Omega^1_{Y_1}.$$

Le (ii) est une conséquence évidente du (i). Le (iii) est une traduction de (ii) de 2.2. □

Dans la suite, nous appliquerons le résultat précédent aux immersions diagonales $X_0 \hookrightarrow X_1 \times_{S_1} \cdots \times_{S_1} X_1$, puisque les surjections canoniques $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \cdots \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$ possèdent des sections. Pour la proposition qui suit, on prend la section s_e du morphisme $\mathcal{O}_{X_1} \otimes_{W_2} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$ donnée par $s_e(b) = 1 \otimes b$.

Proposition 2.3.2. *i Si on choisit $Y_1 = X_1$, alors $\mathcal{M}^{[1]}_{Y_1}$ est quasi-isomorphe au complexe à différentielle nulle $\mathcal{D}_{X_0}$: $\mathcal{O}_{X_0} \bigoplus \Omega^1_{X_0}[-1]$.*

ii Si on choisit $Y_1 = X_1 \times_{S_1} X_1$, et $\alpha : X_0 \to X_1 \times X_1$ obtenue comme le composé de l'immersion fermée $X_0 \to X_1$ et de l'immersion diagonale $\Delta : X_1 \to X_1 \times X_1$, alors $\mathcal{M}^{[1]}_{X_1 \times X_1}$ est quasi-isomorphe au complexe

$$\mathcal{E}_{X_0} : \ 0 \to \mathcal{O}_{X_0} \bigoplus \Omega^1_{X_0} \to \alpha^*\Omega^1_{X_1 \times X_1} \to 0,$$

dont la différentielle est donnée localement, pour $a, b, c \in \mathcal{O}_{X_0}$, par $d_0(a + b \cdot dc) = b \cdot (1 \otimes dc - dc \otimes 1)$.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application de 2.3.1. Avec les notations de cette proposition, dans le cas (i), $\overline{L} = 0$. Dans le cas (ii), $\overline{L} = \Omega^1_{X_0}$, et la description de la différentielle résulte alors du calcul de 2.3.1. □

Remarque. Le quasi-isomorphisme de (iii) de 2.3.1 entre les deux complexes de la proposition est donné par le quotient par le PD-idéal K et le morphisme canonique $\alpha^*\Omega^1_{X_1 \times X_1} \to \Omega^1_{X_0}$. Le diagramme suivant décrit ce quasi-isomorphisme de complexes, dont la flèche verticale de gauche est simplement la projection sur $\mathcal{O}_{X_0}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X_0} \bigoplus \Omega^1_{X_0} \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & \alpha^*\Omega^1_{X_1\times X_1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X_0} \arrow[r, "0"] & \Omega^1_{X_0} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

2.4 Définition de $\Phi^{\leq 1}$

Revenons maintenant au cas d'une immersion fermée dans un S_1-schéma lisse $X_0 \hookrightarrow Y_1$. Supposons de plus que Y_1 soit muni d'un relèvement du Frobenius. On en déduit une immersion fermée $X_0' \hookrightarrow Y_1'$. La proposition suivante permet alors de définir le morphisme $\Phi^{\leq 1}$, à partir de l'action du Frobenius F sur le complexe $\mathcal{E}_{Y_1'}$ défini en 1.

Proposition 2.5. *Sous les hypothèses ci-dessus.*

(i) On peut définir un morphisme de complexes dans $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$, $\Phi^{\leq 1} = m_p^{-1} \circ F$: $\mathcal{L}^{[1]}_{Y_1'}/\mathcal{L}^{[2]}_{Y_1'} \to F_*\mathcal{E}_{Y_0}$.

(ii) Ce morphisme est fonctoriel en la donnée de Y_1 et permet de définir un morphisme $\Phi^{\leq 1}_{abs}$ dans $D^b(\mathcal{O}_{X_0'})$:

$$Ru_{X_0*}(\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}) \to F_*Ru_{X_0/S_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}.$$

Démonstration. Commençons par regarder l'action du Frobenius sur le complexe $\mathcal{E}_{Y_1'}$, dont on notera d la différentielle. D'après les estimations de Mazur 2 et le lemme 1.1,

$$F(J^{[2]}_{Y_1'}) \subset p^2\mathcal{P}(Y_1) = 0,$$

de sorte que F envoie $J_{Y_1'}/J^{[2]}_{Y_1'}$ sur $p\mathcal{P}(Y_1)$ qu'on identifie à $\mathcal{P}(Y_0)$ via m_p^{-1} (1). Ceci définit une application $\Phi_0^{\leq 1} : J_{Y_1'}/J^{[2]}_{Y_1'} \to \mathcal{P}(Y_0)$. De même $F(J_{Y_1'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1'}} \Omega^1_{Y_1'}) = 0$, de sorte que

$$F\left(\mathcal{P}(Y_1')/J_{Y_1'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1'}} \Omega^1_{Y_1'}\right) \subset p \cdot \mathcal{P}(Y_1) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_1}} \Omega^1_{Y_1},$$

qu'on identifie à $\mathcal{P}(Y_0) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_0}} \Omega^1_{Y_0}$ via m_p^{-1}, de façon à définir une application $\Phi_1^{\leq 1}$. Par construction $d \circ \Phi_0^{\leq 1} = \Phi_1^{\leq 1} \circ d$. Enfin, $F(\mathcal{P}(Y_1') \otimes \Omega^2_{Y_1'}) \subset p^2\mathcal{P}(Y_1) \otimes \Omega^2_{Y_1} = 0$, nous dit que $d \circ \Phi_1^{\leq 1} = 0$, ce qui implique que l'on a ainsi défini un morphisme de complexes $\Phi^{\leq 1}$: $\mathcal{L}^{[1]}_{Y_1'}/\mathcal{L}^{[2]}_{Y_1'} \to F_*\mathcal{E}_{Y_0}$.

Pour le (ii), il suffit de montrer que le morphisme ainsi défini ne dépend pas du choix du plongement $X_0 \hookrightarrow Y_1$. Soit Z_1 un autre plongement de X_0 dans un S_1-schéma lisse, muni d'un relèvement du Forbenius. On note $\Phi^{\leq 1}_{Y_1}$ le morphisme correspondant à Y_1 et $\Phi^{\leq 1}_{Z_1}$ le morphisme correspondant à Z_1. Il suffit, d'après la fonctorialité de V2.3.4 de

[Ber74], de remarquer que le diagramme suivant, dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes, est commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{[1]}_{Y'_1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Phi^{\leq 1}_{Y_1}"'] & \mathcal{M}^{[1]}_{Z'_1} \arrow[d, "\Phi^{\leq 1}_{Z_1}"'] \\ \mathcal{E}_{Y_0} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}_{Z_0}. \end{tikzcd}$$

Or la commutativité vient du fait que le diagramme analogue pour le Frobenius sur les complexes $\mathcal{E}_{Y'_1}$ et $\mathcal{E}_{Z'_1}$ est commutatif. □

Tronqué en degré ≤ 1, le morphisme de Deligne-Illusie induit un morphisme dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$: $DI'^{\leq 1}$: $\mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0} \to F_* DR_{X_0}$. Les complexes $Ru_{X'_0 *}(\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1})$ et $Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$ et se réalisent aussi respectivement sur X'_0 et X_0. On peut regarder le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Ru_{X'_0 *}(\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}) \arrow[r, "\Phi^{\leq 1}_{abs}"] \arrow[d, "can"'] & F_* Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"'] \\ \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0} \arrow[r, "DI'^{\leq 1}"] & F_* DR_{X_0}. \end{tikzcd}$$

Le but de cet article est de montrer le théorème :

Théorème 2.6. *Le diagramme précédent est commutatif.*

La démonstration de ce théorème occupe la section 3 et fera l'objet de l'énoncé 3.4.3.

Rappelons que, par passage à la cohomologie, le morphisme $DI'^{\leq 1}$, coïncide avec l'isomorphisme de Cartier $C^{-1} : \Omega^1_{X'_0} \to \mathcal{H}^1 F_* DR_{X_0}$, défini pour c une section locale de $\mathcal{O}_{X'_0}$ par $C^{-1}(dc) =$ classe de $(c^{p-1}dc)$ dans $\mathcal{H}^1 F_* DR_{X_0}$.

3 Comparaison avec le morphisme de Deligne-Illusie

Dans toute la suite, nous fixons une immersion fermée $X_0 \overset{a_0}{\hookrightarrow} X_1$, où X_1 est un S_1-schéma projectif et lisse.

3.1 Considérations simpliciales

Il est classique que l'action du Frobenius sur la cohomologie cristalline se calcule par descente cohomologique. Nous mettons en place ce calcul ici. Donnons-nous un recouvrement ouvert de X_1 par des ouverts affines $\mathcal{U}_i$ pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, munis de coordonnées globales et d'un relèvement du Frobenius $F_i : \mathcal{U}'_i \to \mathcal{U}_i$. Soit $\mathcal{U}_{[0]} = \coprod_{i \in I} \mathcal{U}_i$. On considère aussi U_i les fibres spéciales de ces ouverts, qui forment un recouvrement de X_0 et $U_{[0]} = \coprod_{i \in I} U_i$.

Soit $\mathcal{U}_\bullet$ le S_1-schéma simplicial donné par le cosquelette $cosq(\mathcal{U}_{[0]} \to S_1)$, i.e. le schéma simplicial augmenté vers S_1 de composantes les puissances cartésiennes de $\mathcal{U}_{[0]}$ sur S_1, $U_\bullet$ le schéma simplicial augmenté vers X_0, $cosq(U_{[0]} \to X_0)$, de composantes les puissances cartésiennes de $\mathcal{U}_{[0]}$ sur X_0. Nous disposons bien entendu, après changement de base par le Frobenius, des schémas simpliciaux $U'_\bullet$ et $\mathcal{U}'_\bullet$. On note alors ε le morphisme canonique $U'_{[0]} \to X'_0$.

Sur le site cristallin associé au ce schéma simplicial $U'_\bullet$, on considère, pour tout entier k, les faisceaux $\mathcal{O}_{U'_\bullet/S_1}$ ainsi que $\mathcal{J}^{[k]}_{U'_\bullet}$ (resp. $\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_1}$). Le schéma $U'_\bullet$ est un sous-schéma simplicial de $\mathcal{U}'_\bullet$. Notons encore pour un multi-indice $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_u)$:

- $U'_{\underline{i}} = U'_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap U'_{i_u}$, $\mathcal{U}'_{\underline{i}} = \mathcal{U}'_{i_0} \bigcap \cdots \bigcap \mathcal{U}'_{i_u}$,
- $\mathcal{U}'_{(\underline{i})} = \mathcal{U}'_{i_0} \times_{S_1} \ldots \times_{S_1} \mathcal{U}'_{i_u}$, $U'_{(\underline{i})} = U'_{i_0} \times_{S_0} \ldots \times_{S_0} U'_{i_u}$,
- $\alpha_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\underline{i})}$, $\beta_{\underline{i}}$ l'immersion fermée $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow U'_{(\underline{i})}$,
- $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$ la PD-enveloppe de l'immersion $\alpha_{\underline{i}}$, $J_{\underline{i}}$ le PD-idéal de cette immersion,
- $M_{\underline{i}}$ l'idéal de l'immersion fermée $\mathcal{U}'_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}'_{(\underline{i})}$, dont le PD-idéal sera noté $N_{\underline{i}}$. On remarquera que $M_i = 0$ et que $M_{i,j}$ est la restriction à $\mathcal{U}'_{i,j}$ de l'idéal diagonal de X_1 engendré par les sections locales $a \otimes b - b \otimes a$ pour $a, b \in \mathcal{O}_{X_1}$.
- $L_{\underline{i}}$ l'idéal de l'immersion fermée $\alpha_{\underline{i}}$, de sorte que $L_{\underline{i}} = p\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} + M_{\underline{i}}$, $J_{\underline{i}}$ le PD-idéal de l'immersion fermée $\alpha_{\underline{i}}$. Ainsi $N_{\underline{i}}$ est un sous-PD-idéal de $J_{\underline{i}}$. En fait, $J_{\underline{i}} = p\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{(\underline{i})}} \bigoplus N_{\underline{i}}$ (cf. la démonstration de 2.3.1).

Dans la suite on adaptera la proposition 2.2 aux immersions fermées $\alpha_{\underline{i}}$.

Comme $U'_\bullet$ a pour composantes des réunions disjointes d'ouverts de X_0, les composantes du faisceau $\varepsilon^*\mathcal{J}^{[1]}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}$ sont sommes directes de restrictions de $\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}$ à des intersections de k-ouverts parmi les U'_i, pour k variable On voit ainsi que $\varepsilon^*\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}$ est le faisceau simplicial $\mathcal{J}^{[1]}_{U'_\bullet}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet}$.

Par V 3.4.8 de [Ber74], la flèche canonique d'adjonction $\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1} \to R\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}$ est un isomorphisme, ce qui nous donne finalement un isomorphisme canonique dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$,

$$Ru_{X_0/S_1*}\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1} \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet/S_1*}\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_1}.$$

L'application $\varepsilon : \mathcal{U}'_\bullet \to X_1$ est affine, et grâce à la proposition 2.2, les termes du complexe $Ru_{U'_\bullet/S_1*}\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_1}$ sont $\mathcal{O}_{U'_\bullet}$ cohérents, de sorte que ce complexe est à termes acycliques pour ε_*. Nous le calculons explicitement dans la sous-section suivante.

Dans la suite, on notera DC' les morphismes de descente cohomologique se rapportant à des résolutions simpliciales de X'_0.

3.2 Le calcul

Sauf mention explicite du contraire, les produits cartésiens seront pris ici sur S_1. Les notations sont celles définies en 3.1.

3.2.1 Mise en garde. Les algèbres $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$ sont des $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}$-algèbres, obtenues par la propriété universelle des algèbres à puissances divisées. Les morphismes $J_{\underline{i}}/J_{\underline{i}}^{[2]} \to J_{\underline{i}'}/J_{\underline{i}'}^{[2]}$ avec $|\underline{i}| = u$ et $|\underline{i}'| = u'$ sont obtenus par fonctorialité des enveloppes à puissances divisées à partir des morphismes habituels $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$, et dont la construction est rappelée ci-dessous. Pour expliciter ces morphismes, nous nous contentons dans la suite de donner les formules pour les flèches $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i}')}}$. Il est alors sous-entendu que ces flèches donnent des flèches au niveau des complexes simpliciaux considérés, par fonctorialité des constructions. Il s'agit donc d'un abus de notation, qui est habituel.

Nous donnerons au cours du calcul l'expression détaillée de ces flèches.

D'autre part, nous travaillons dans des quotients. Nous utiliserons alors la notation $\overline{a}$ pour signaler qu'on regarde l'image de l'élément a dans un quotient, qui sera en principe clair. Ainsi, dans $J_{\underline{i}}/J_{\underline{i}}^{[2]}$ (où $J_{\underline{i}}$ est le PD-idéal de $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})})$), si b est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_i}$, resp. c une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_j}$, l'élément $\overline{1 \otimes bc - b \otimes c}$ sera l'image de l'élément $1 \otimes bc - b \otimes c$ modulo $J_{\underline{i}}^{[2]}$.

3.2.2 Considérons, pour $u \in \mathbf{N}$, $\underline{i} = \{i_0, \dots, i_u\}$, et $l \in \{0, \dots, n\} \backslash \{i_0, \dots, i_u\}$,

$$\begin{array}{lccc} \delta_l \colon & \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_u}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_0}} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_l} \otimes_{S_1} \cdots \otimes_{S_1} \mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i_u}} \\ & f_0 \otimes \cdots \otimes f_u & \longmapsto & f_0 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \cdots \otimes f_u. \end{array}$$

Cette flèche induit des flèches

$$\begin{array}{lccc} d'^{0,u} \colon & \prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) & \longrightarrow & \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \\ & S = \prod(S_{\underline{i}}) & \longmapsto & d'^{0,u}(S) \text{ avec } (d'^{0,u}(S))_{\underline{i}} = \sum_{l=0}^{u+1} (-1)^l \delta_l (S_{i_0, \dots, \widehat{i_l}, \dots, i_{u+1}}), \end{array}$$

ainsi que les flèches analogues pour $v \in \mathbf{N}$, $d'^{v,u}$:

$$\prod_{|\underline{i}|=u+1} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega^v_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}} \to \prod_{|\underline{i}|=u+2} \mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(\underline{i})}) \otimes \Omega^v_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}. \tag{3}$$

Le complexe $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet/S_1 *} \mathcal{J}_{U'_\bullet}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet}$, avec les notations de 2.2 appliquées aux immersions fermées $\alpha_{\underline{i}}$, est quasi-isomorphe au bicomplexe $M^{\bullet,\bullet}$, qu'on représente comme un complexe dont les termes sont des complexes en degré 0, 1, ..., n :

$$M^{\bullet,\bullet} \ : \ 0 \to \prod_i \mathcal{M}^{[1]}_{\mathcal{U}'_i} \to \prod_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{\mathcal{U}'_{(i,j)}} \to \cdots \to \mathcal{M}^{[1]}_{\mathcal{U}'_{(0,\dots,n)}} \to 0. \qquad (4)$$

Toujours d'après 2.2, chaque complexe $\mathcal{M}^{[1]}_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}}$ admet une résolution en deux crans. Considérons le bi-complexe de terme général $K^{t,u}$ pour $u, v \geq 0$,

$$K^{0,u} \prod_{|\underline{i}|=u+1} J_{\underline{i}}/J^{[2]}_{\underline{i}}, \text{ et } K^{1,u} = \prod_{|\underline{i}|=u+1} \alpha^*_{\underline{i}}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(\underline{i})}},$$

avec pour différentielle $d'^{\cdot,u} : K^{\cdot,u} \to K^{\cdot,u+1}$ décrites ci-dessus (3) et $d''^{t,\cdot}$, qui est la différentielle provenant du complexe donné en 2.2 et qui sera explicitée plus loin. Ecrivons les premiers termes de ce bicomplexe :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \\
0 \arrow[r] & \prod_i \alpha^*_i\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i)}} \arrow[r, "d'^{1,1}"] \arrow[u] & \prod_{i<j} \alpha^*_{i,j}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}} \arrow[r] \arrow[u] & \prod_{i<j<k} \alpha^*_{i,j,k}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j,k)}} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & \prod_i J_i/J^{[2]}_i \arrow[r, "d'^{0,1}"] \arrow[u, "d''^{0,1}"] & \prod_{i<j} J_{i,j}/J^{[2]}_{i,j} \arrow[r] \arrow[u] & \prod_{i<j<k} J_{i,j,k}/J^{[2]}_{i,j,k} \arrow[r] \arrow[u] & \dots.
\end{tikzcd}$$

Le complexe simple $K^\bullet$ associé à ce bi-complexe est quasi-isomorphe à $R\varepsilon_* \circ Ru_{U'_\bullet/S_1*}\mathcal{J}_{U'_\bullet/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{U'_\bullet/S_1}$ et aussi au complexe $Ru_{X_0*}(\mathcal{J}_{X_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0/S_1})$, c'est-à-dire finalement au complexe à différentielle nulle $\mathcal{D}_{X'_0}$ (cf 2.3.1). En particulier, la cohomologie de ce complexe est concentrée en degrés 0 et 1, de sorte que ce complexe simple est quasi-isomorphe à son tronqué cohomologique $\sigma_{\leq 1}K^\bullet$. Le complexe simple $K^\bullet$ est le complexe :

$$K^\bullet \ : \ 0 \to \prod_i J_i/J^{[2]}_i \overset{d_0}{\to} \prod_{i<j} J_{i,j}/J^{[2]}_{i,j} \bigoplus_i \alpha^*_i\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i)}}$$
$$\overset{d_1}{\to} \prod_{i<j<k} J_{i,j,k}/J^{[2]}_{i,j,k} \bigoplus_{i<j} \alpha^*_{i,j}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}} \to \dots \to \alpha^*_{0,\dots,n}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i_0,\dots,i_n)}} \to 0, \quad (5)$$

et les premières différentielles proviennent par fonctorialité de la formation des PD-algèbres, des flèches suivantes :

$$d_0\left(\prod_{i=1}^n f_i\right) = \prod_{i<j}(1 \otimes f_j - f_i \otimes 1) \bigoplus \prod_{i=1}^n df_i,$$

$$d_1\left(\prod_{i<j} h_{i,j} \bigoplus \prod_{i=1}^n \omega_i\right) = \prod_{i<j<k} (\delta_0(h_{j,k}) - \delta_1(h_{i,k}) + \delta_2(h_{i,j})) \bigoplus \prod_{i<j}(1 \otimes \omega_j - \omega_i \otimes 1 - dh_{i,j}).$$

On note finalement DC'_2 le morphisme de descente cohomologique

$$DC'_2 \ : \ Ru_{X'_0/S_1*}\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1} \to K^\bullet.$$

Dans la sous-section suivante, nous précisons ce calcul.

3.3 Comparaison de morphismes de descente cohomologique

3.3.1 Pour calculer le complexe $Ru_{X_0'/S_1 *}\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}$, sans vouloir calculer le morphisme de Frobenius, on peut aussi utiliser le recouvrement (U_i') et les immersions fermées $U'_{\underline{i}} \hookrightarrow \mathcal{U}'_{\underline{i}}$. On peut aussi considérer le recouvrement $X_0' \hookrightarrow X_1'$, qui donne lieu à un morphisme de schémas simpliciaux constants $X'_{0_\bullet} \hookrightarrow X'_{1_\bullet}$. D'où finalement un diagramme de schémas simpliciaux

$$\begin{tikzcd} U'_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{U}'_\bullet \arrow[d] \\ X'_{0_\bullet} \arrow[r, hook] & X'_{1_\bullet}. \end{tikzcd}$$

Le morphisme de descente cohomologique obtenu pour le morphisme de schémas simpliciaux constants du bas n'est rien d'autre que le morphisme canonique de 2.3.1.

On notera aussi $\widetilde{U'}_\bullet$ le système de schémas simpliciaux correspondant aux morphismes $U'_\bullet \hookrightarrow \mathcal{U}'_\bullet$ et $\tilde{\varepsilon} : U'_\bullet \to X_0'$, correspondant à ce système de schémas simpliciaux. On dispose alors d'un isomorphisme de descente cohomologique DC_1'. Les complexes $\mathcal{M}^{[1]}_{\mathcal{U}'_{\underline{i}}}$ décrits en 2.2 sont quasi-isomorphes aux complexes à différentielles nulles $\mathcal{D}_{U'_{\underline{i}}}$: $\mathcal{O}_{U'_{\underline{i}}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{\underline{i}}}[-1]$ via les identifications 2.3.1 et 2.3.2. Le complexe $R\tilde{\varepsilon}^*\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}$ est alors donné par le complexe simple associé au bicomplexe

$$\tilde{M}^{\bullet,\bullet} \ : \ 0 \to \prod_i \mathcal{M}^{[1]}_{U_i'} \to \prod_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{i,j}} \to \cdots \to \mathcal{M}^{[1]}_{U'_{0,\ldots,n}} \to 0. \tag{6}$$

Soit $\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0'})$ le complexe de Čech du faisceau $\mathcal{O}_{X_0'}$ associé au recouvrement (U_i'), resp. $\mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X_0'})$, celui du faisceau $\Omega^1_{X_0'}$. On voit finalement que le morphisme canonique DC_1', associé au système $\widetilde{U'}_\bullet$, va de $Ru_{X_0'/S_1 *}\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}$ vers le complexe simple associé au bi-complexe $\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0'}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X_0'})[-1]$. On a de plus un morphisme de complexes canonique, associé au diagramme de schémas simpliciaux ci-dessus :

$$res' \ : \ \mathcal{O}_{X_0'} \bigoplus \Omega_{X_0'} \to \mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0'}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X_0'})[-1].$$

D'autre part, étant donné les identifications qui ont été faites, et la fonctorialité des flèches DC pour le diagramme ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} Ru_{X_0'/S_1 *}\mathcal{J}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1} \arrow[rr, "can=DC_0'"] \arrow[dr, "DC_1'"'] & \circlearrowleft & \mathcal{O}_{X_0'} \bigoplus \Omega_{X_0'}[-1] \arrow[dl, "res'"] \\ & \left[\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0'}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X_0'})[-1]\right]_s. & \end{tikzcd}$$

Utilisons de nouveau les identifications 2.3.2, en munissant $\mathcal{P}(\mathcal{U}'_{(i,j)})$ de la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{(i,j)}}$-module envoyant a sur $1 \otimes a$. Le premier terme du complexe $K^\bullet$ de 5 s'identifie alors à

$$K^0 \simeq \prod_i \mathcal{O}_{U'_i} \overset{\cdot p}{\simeq} \prod_i J_i/J_i^{[2]},$$

le deuxième terme K^1 du complexe $K^\bullet$ de 5 à

$$K^1 \simeq \prod_{i<j} J_{i,j}/J_{i,j}^{[2]} \bigoplus \prod_i \alpha_i^* \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i)}} \xrightarrow{\sim} \prod_{i<j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i}. \tag{7}$$

On peut donc récrire $K^\bullet$ en utilisant ces identifications, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} K^\bullet \;:\; 0 \to \prod_i \mathcal{O}_{U'_i} \to & \left(\prod_{i<j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}} \right) \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i} \\ & \xrightarrow{d_1} \prod_{i<j<k} J_{i,j,k}/J_{i,j,k}^{[2]} \bigoplus_{i<j} \alpha_{i,j}^* \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}} \to \ldots \to \alpha_{0,\ldots,n}^* \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i_0,\ldots,i_n)}} \to 0, \end{aligned} \tag{8}$$

Définition 3.3.2. *i Pour f une section locale de $\mathcal{O}_{X'_0}$, on pose*

$$w_0(f) = (f_{|U'_i}) \in \prod_i \mathcal{O}_{U'_i}.$$

ii Pour ω une section locale de $\Omega^1_{X'_0}$, on pose

$$w_1(\omega) = ((0 \oplus \omega_{|U'_{i,j}}) \bigoplus \omega_{|U'_i}) \in \left(\prod_{i<j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}} \right) \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i}.$$

Proposition 3.3.3. *L'application w définit un morphisme de complexes $\mathcal{D}_{X'_0} \to K^\bullet$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} Ru_{X'_0/S_1*}\mathcal{J}/\mathcal{J}^{[2]} \arrow[rr, "can = DC'_0"] \arrow[dr, "DC'_2"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "w"] \\ & K^\bullet. & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Montrons d'abord que w est un morphisme de complexes. Comme $\mathcal{D}_{X'_0}$ est un complexe à différentielle nulle, il suffit de montrer que $d_0 \circ w_0 = 0$ (resp. $d_1 \circ w_1 = 0$). Montrons d'abord que $d_0 \circ w_0 = 0$. Soit f une section locale de $\mathcal{O}_{X'_0}$, alors pf est une section locale de $p\mathcal{O}_{X'_1}$, qui s'envoie sur $1 \otimes pf \in \mathcal{P}(X'_1)$.

$$\begin{aligned} d_0(1 \otimes pf) &= (0 \oplus d(pf)_{|U'_{i,j}}) \bigoplus (d(pf)_{|U'_i}) \\ &= 0 \in \prod_{i,j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \alpha_i^* \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i)}}, \end{aligned}$$

d'où l'assertion. Montrons ensuite que $d_1 \circ w_1 = 0$. Pour cela, notons $\rho_{i,j}$ l'immersion ouverte $U'_{i,j} \hookrightarrow U'_i$ et identifions $\alpha_{i,j}^* \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}}$ à $\rho_{i,j}^* \beta_i^* \Omega^1_{U'_i} \oplus \rho_{j,i}^* \beta_j^* \Omega^1_{U'_j}$. Un élément ω de $\Omega^1_{X'_0}$

s'écrit localement $\omega = bdc$, soit comme la classe de $\overline{1 \otimes bc - c \otimes b}$, avec $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$ dans $J_{X'_1}/J^{[2]}_{X'_1}$. Alors $w_1(\omega) = (0 \oplus \overline{1 \otimes bc - c \otimes b}_{|U'_i \times U'_j}) \bigoplus (bdc_{|U'_i})$. La composante sur $J_{i,j,k}/J^{[2]}_{i,j,k}$ de $d_1 \circ w_1(\omega)$ est

$$\begin{aligned}
d_1 \circ w_1(\omega)_{i,j,k} &= \overline{1 \otimes 1 \otimes bc - 1 \otimes c \otimes b - (1 \otimes 1 \otimes bc - c \otimes 1 \otimes b) + 1 \otimes bc \otimes 1 - c \otimes b \otimes 1} \\
&= \overline{(c \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes c \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes b - 1 \otimes b \otimes 1)} \in J^{[2]}_{i,j,k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La composante sur $\alpha^*_{i,j}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}}$ de $d_1 \circ w_1(\omega)$ est

$$\begin{aligned}
d_1 \circ w_1(\omega) &= -\overline{d((1 \otimes b)(1 \otimes c - c \otimes 1))} + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)_{|\mathcal{U}'_{i,j}} \\
&= -\overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} - (b(1 \otimes dc - dc \otimes 1) + b(1 \otimes dc - dc \otimes 1)_{|\mathcal{U}'_{i,j}} \\
&= \overline{(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db)} \\
&= 0 \in \alpha^*_{i,j}\Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}},
\end{aligned}$$

car $(1 \otimes c - c \otimes 1)(1 \otimes db) \in M_{i,j} \otimes \Omega^1_{\mathcal{U}'_{(i,j)}}$. Et on en conclut que w est un morphisme de complexes.

Considérons ensuite le diagramme de morphismes de schémas simpliciaux, où les deux carrés sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
U'_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{U}'_{(\bullet)} \\
U'_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{U}'_\bullet \arrow[u, hook] \arrow[d] \\
X'_{0\bullet} \arrow[r, hook] & X'_{1\bullet}.
\end{tikzcd}$$

Le carré cartésien du haut donne une flèche canonique $red' : K^\bullet \to \Big[\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X'_0}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]\Big]_s$ tel que $red' \circ DC'_2 = DC'_1$. Le complexe $\mathcal{C}^\vee = \Big[\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X'_0}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]\Big]_s$ s'écrit :

$$0 \to \prod_i \mathcal{O}_{U'_i} \overset{d'_0}{\to} \prod_{i<j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i} \overset{d'_1}{\to} \prod_{i<j<k} \mathcal{O}_{U'_{i,j,k}} \bigoplus \prod_{i<j} \Omega^1_{U'_{i,j}} \to \ldots \overset{d'_n}{\to} \Omega^1_{U'_{0,\ldots,n}} \to 0.$$

Calculons red'_0 et red'_1. On voit facilement que $red'_0 : K^0 = \prod_i \mathcal{O}_{U'_i} \to \prod_i \mathcal{O}_{U'_i}$ est égal à l'identité. D'autre part, identifions la composante d'indice (i,j) de K^1 comme en 7 à

$$\prod_{i,j} \mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}} \bigoplus \prod_i \Omega^1_{U'_i}.$$

Alors, d'après la démonstration de 2.3.2, la flèche $J_{i,j}/J^{[2]}_{i,j} \to p\mathcal{O}_{\mathcal{U}'_{i,j}} \simeq \mathcal{O}_{U'_{i,j}}$ est donnée par la réduction modulo le PD-idéal $N_{i,j}$ (où ce qui revient au même ici modulo $M_{i,j}$), ce qui donne le fait que red'_1 est la projection :

$$red'_1((f_{i,j} \oplus \omega_{i,j}) \oplus (\eta_i)) = (f_{i,j}) \oplus (\eta_i).$$

Ceci nous permet de calculer pour $a \in \mathcal{O}_{X'_0}$,

$$\begin{aligned} red'_0 \circ w_0(a) &= (a_{|U'_i}) \\ &= res'_0(a) \end{aligned}$$

et pour $\omega \in \Omega^1_{X'_0}$,

$$\begin{aligned} red'_1 \circ w_1(\omega) &= red'_1((0 \oplus \omega_{|U'_{i,j}}) \bigoplus (\omega_{|U'_i}) \\ &= (\omega_{|U'_i}) \\ &= res'_1(\omega). \end{aligned}$$

On en conclut que $res' = red' \circ w$.

On dispose finalement du diagramme suivant dans $D^b(Ab_{X'_1})$

$$\begin{tikzcd}[nodes in empty cells]
Ru_{X'_0/S_1*}\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1} \arrow[rr, "can=DC'_0"] \arrow[dr, "DC'_2"] \arrow[drrr, bend left, "DC'_1"] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "w"] \arrow[dr, "res'"] & \\
& K^\bullet \arrow[rr, "red'"] & {} \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \left[\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X'_0}) \bigoplus \mathcal{C}^\vee(\Omega^1_{X'_0})[-1]\right]_s ,
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{aligned} red' \circ DC'_2 &= DC'_1 \\ res' \circ DC'_0 &= DC'_1 \\ red' \circ w &= res'. \end{aligned}$$

On en déduit : $red' \circ DC'_2 = res' \circ DC'_0 = red' \circ w \circ DC'_0$. Comme l'application red' est un quasi-isomorphisme, cela nous donne l'égalité des morphismes dans la catégorie dérivée : $w \circ DC'_0 = DC'_2$.

□

Nous obtenons en particulier le

Corollaire 3.3.4. *Le morphisme de complexes w construit en 3.3.2 est un quasi-isomorphisme de complexes.*

Rappelons maintenant la construction de Deligne-Illusie.

3.4 Construction du morphisme de Deligne-Illusie

Identifions comme d'habitude $p\mathcal{O}_{X_1}$ à $\mathcal{O}_{X_0}$ via $m_p : \mathcal{O}_{X_0} \overset{\cdot p}{\simeq} p\mathcal{O}_{X_1}$.

Le morphisme de Deligne-Illusie est construit en [DI87]. Nous nous référerons aussi à [Ill96]. Suivant 2.11 et 5.4 de [Ill96], il existe un morphisme $\mathcal{O}_{X_0'}$-linéaire

$$h_{i,j} \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_0'}}(\Omega^1_{X_0'/S_0}, F_*\mathcal{O}_{X_0})(U_{i,j}),$$

tel que

i $\forall b, c \in \mathcal{O}_{X_0'}$, $h_{i,j}(bdc) = b^p m_p^{-1}(F_j(c) - F_i(c))$,

ii $h_{i,j} + h_{j,k} = h_{i,k}$.

La deuxième relation implique que les $h_{i,j}$ définissent un cocycle de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_0'}}(\Omega^1_{X_0'/S_0}, F_*\mathcal{O}_{X_0})$. Soit $F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0})$ le complexe simple associé à la résolution de Čech de l'image directe par F_* du complexe de de Rham de X_0, relativement au recouvrement par les ouverts U_i. On a :

$$\begin{aligned} F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) : \ & 0 \to \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \to \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega_{U_i} \\ & \to \prod_{i<j<k} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j,k}} \bigoplus \prod_{i<j} F_*\Omega^1_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega^2_{U_i} \to \cdots \to F_*\Omega^N_{U_{i_0,\ldots,i_n}} \to 0. \end{aligned}$$

On dispose aussi du morphisme canonique $F : \mathcal{O}_{X_0'} \to F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0})$. Deligne et Illusie définissent un morphisme relativement au recouvrement par les ouverts $(\mathcal{U}_i)_i$: $DI^{\leq 1} : \mathcal{D}_{X_0'} \to F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0})$, par :

(i) $\forall a \in \mathcal{O}_{X_0'}$, $DI^{\leq 1}(a) = (F(a)_{|U_i}) \in \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i}$,

(ii) $\forall \omega \in \Omega^1_{X_0'}$, $DI^{\leq 1}(\omega) = (h_{i,j}(\omega)_{|U_{i,j}}) \bigoplus (m_p^{-1}(dF_i(\omega))_{|U_i}) \in \prod_{i<j} F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega_{U_i}$.

3.4.1 Relativement aux immersions $U_{\underline{i}} \hookrightarrow U_{(\underline{i})}$, nous pouvons considérer les complexes

$$\mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}} : \ 0 \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(\underline{i})}}} \Omega^1_{U_{(\underline{i})}} \to \cdots \to \mathcal{P}(U_{(\underline{i})}) \otimes_{\mathcal{O}_{U_{(\underline{i})}}} \Omega^N_{U_{(\underline{i})}} \to 0.$$

D'après 2.4, le morphisme $\Phi^{\leq 1}$ induit un morphisme de complexes entre le bicomplexe suivant $M^{\bullet,\bullet}$ défini en 4

$$0 \to \prod_i \mathcal{M}^{[1]}_{U_i} \to \prod_{i,j} \mathcal{M}^{[1]}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to \mathcal{M}^{[1]}_{U_{(0,\ldots,n)}} \to 0,$$

et le complexe

$$0 \to \prod_i F_*\mathcal{E}_{U_i} \to \prod_{i,j} F_*\mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to F_*\mathcal{E}_{U_{(0,\ldots,n)}}.$$

et donc par définition de $K^\bullet$, qui est le complexe simple associé au complexe source, un morphisme $\Phi^{\leq 1}$:

$$K^\bullet \to \left[0 \to \prod_i F_*\mathcal{E}_{U_{(i)}} \to \prod_{i,j} F_*\mathcal{E}_{U_{(i,j)}} \to \cdots \to F_*\mathcal{E}_{U_{(i_0,\ldots,i_n)}} \right]_s .$$

Dans la suite, nous noterons $E^\bullet$ le complexe simple but du morphisme précédent. Nous pouvons expliciter ce complexe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E^\bullet \;:\; 0 \to \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \to \prod_{i<j} F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \bigoplus \prod_i F_*\Omega^1_{U_i} \\ \to \prod_{i<j<k} F_*\mathcal{P}(U_{(i,j,k)}) \bigoplus \prod_{i<j} F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \otimes \Omega^1_{U_{(i,j)}} \bigoplus \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \otimes \Omega^2_{U_i} \to \cdots \\ \to F_*\mathcal{P}(U_{(0,\ldots,n)}) \otimes \Omega^{N(n+1)}_{U_{0,\ldots,n}}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant comme pour la démonstration de 3.3.3, le diagramme de schémas simpliciaux

$$\begin{tikzcd} U_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_{(\bullet)} \\ U_\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_\bullet \arrow[u, hook] \arrow[d] \\ X_{0_\bullet} \arrow[r, hook] & X_{0_\bullet}. \end{tikzcd}$$

Par descente cohomologique, on a un quasi-isomorphisme entre $E^\bullet$ et $F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$. On dispose enfin d'une flèche canonique red :

$$E^\bullet \overset{red}{\to} F_*\mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0}),$$

qui provient des quasi-isomorphismes $F_*\mathcal{E}_{U_{(\underline{i})}} \to F_*DR_{U_{(\underline{i})}}$, et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[r, "DC_1"] \arrow[dr, "DC_2"'] & F_*\mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0}) . \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & E^\bullet. \arrow[u, "red"'] \end{tikzcd}$$

De même, si l'on note res la flèche de résolution canonique $F_*DR_{X_0} \to F_*\mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0})$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[r, "DC_1"] \arrow[dr, "DC_0=can"'] & F_*\mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0}) . \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & F_*DR_{X_0}. \arrow[u, "res"'] \end{tikzcd}$$

Finalement, nous obtenons formellement

$$red \circ DC_2 = DC_0 \circ can. \tag{9}$$

Calculons l'application red :

$$\begin{array}{rcl} red_0\colon & \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_i} \\ & (g_i) \longmapsto (g_i), \\ red_1\colon & \prod_i F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \bigoplus \prod_i F_*\Omega^1_{U_i} \longrightarrow \prod_i F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}} \bigoplus \prod_i F_*\Omega^1_{U_i} \\ & (k_{i,j}) \bigoplus (\omega_i) \longmapsto \tau_{i,j}(k_{i,j}) \bigoplus (\omega_i), \end{array}$$

où $\tau_{i,j}$ est l'application de réduction canonique : $F_*\mathcal{P}(U_{(i,j)}) \to F_*\mathcal{O}_{U_{i,j}}$.

Proposition 3.4.2. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[r, "w"] \arrow[d, "DI^{\leq 1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K^\bullet \arrow[d, "\Phi^{\leq 1}"] \\ F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) & E^\bullet. \arrow[l, two heads, "red"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous reprenons la description 5 du complexe $K^\bullet$. En particulier, son terme K^0 est canoniquement isomorphe à $\prod_i \mathcal{O}_{U'_i}$. Soit f une section locale de $\mathcal{O}_{X'_0}$, alors

$$\begin{aligned} w_0(f) &= (f_{|U'_i}) \in K^0, \\ \Phi_0^{\leq 1} \circ w_0(f) &= (F(f_{|U'_i})) \in E^0 \\ red_0 \circ \Phi_0^{\leq 1} \circ w_0(f) &= (F(f_{|U'_i})), \\ &= DI_0^{\leq 1}(f) \end{aligned}$$

Comparons maintenant ces deux morphismes en degré 1. Soit $\omega \in \Omega^1_{X'_0}$, qu'on écrit localement comme $\omega = bdc$, i.e. $\omega = \overline{1 \otimes bc - c \otimes b}$, avec $b, c \in \mathcal{O}_{X'_0}$ dans $J_{X'_1 \times X'_1}/J^{[2]}_{X'_1 \times X'_1}$. Il suffit, par linéarité, de montrer que $red_1 \circ \Phi_1^{\leq 1} \circ w_1(dc) = DI_1^{\leq 1}(dc)$, pour toute section locale c de $\mathcal{O}_{X'_0}$. Dans la suite, nous prenons $\omega = dc$. Nous identifions à nouveau comme en 2.3.2 $\mathcal{O}_{U'_{i,j}} \bigoplus \Omega^1_{U'_{i,j}}$ à $J_{i,j}/J^{[2]}_{i,j}$, et dc sur $\overline{1 \otimes c - c \otimes 1}$ (le surlignage indique que l'on prend la classe modulo $J^{[2]}_{i,j}$). Pour calculer $\Phi_1^{\leq 1}$, il faut regarder $F_i \times F_j(\omega_{|U_{i,j}}) \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{i,j})$, et appliquer m_p^{-1} pour avoir le résultat dans $\mathcal{P}(U_{i,j})$. On calcule :

$$\begin{aligned} (F_i \times F_j)(\omega_{|U_{i,j}}) &= (F_i \times F_j)(1 \otimes c - c \otimes 1), \\ &= \overline{1 \otimes F_j(c) - F_i(c) \otimes 1}, \\ &= \overline{(1 \otimes F_j(c) - F_i(c) \otimes 1)}. \end{aligned}$$

Soit $r_{i,j} = \overline{(1 \otimes F_j(c) - F_i(c) \otimes 1)} \in \mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$, et γ les puissances divisées sur le PD-idéal $J_{i,j}$ idéal. Il est clair, d'après la construction de $\Phi^{\leq 1}$ donnée en 2.4, que $r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$, ce que l'on peut vérifier explicitement.

Lemme 3.4.2.1. *$r_{i,j} \in p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)})$.*

Vérifions ce lemme. Nous savons que $F_j(c) - F_i(c) \in p\mathcal{O}_{X_1}$, et

$$1 \otimes c^p - c^p \otimes 1 = (1 \otimes c - c \otimes 1)^p \; mod \; p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}).$$

Finalement, ceci nous donne

$$\begin{aligned} 1 \otimes F_j(c) - F_i(c) \otimes 1 &= 1 \otimes F_i(c) - F_i(c) \otimes 1 + 1 \otimes (F_j(c) - F_i(c)) \\ &= 1 \otimes F_i(c) - F_i(c) \otimes 1 \; mod \; p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}) \\ &= 1 \otimes c^p - c^p \otimes 1 \; mod \; p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}) \\ &= p(p-1)!\gamma(1 \otimes c - c \otimes 1) \\ &= 0 \; mod \; p\mathcal{P}(\mathcal{U}_{(i,j)}) \end{aligned}$$

Observons maintenant que d'après 1, $\tau_{i,j}\,(r_{i,j}) = m_p^{-1}(F_j(c) - F_i(c))$. Finalement, nous avons le calcul suivant, pour $\omega = dc$ une section locale de $\Omega^1_{X'_0}$:

$$\begin{aligned} w_1(\omega) &= (0 \oplus \omega_{|U'_{i,j}}) \oplus (\omega_{|U'_i}) \in K^1, \\ \Phi_1^{\leq 1} \circ w_1(\omega) &= \left(m_p^{-1} r_{i,j}\right)_{|U_{i,j}}) \oplus (m_p^{-1} \circ F_i(\omega_{|U'_i})) \in E^1, \\ red_1 \circ \Phi_1^{\leq 1} \circ w_1(\omega) &= (m_p^{-1}(F_j(c) - F_i(c))_{|U_{i,j}}) \oplus (m_p^{-1} \circ F_i(\omega_{|U'_i})), \\ &= DI_1^{\leq 1}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Nous terminons par un corollaire qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 3.4.3. *Le diagramme suivant de morphismes dans les catégories dérivées est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} Ru_{X'_0 *}(\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}) \arrow[r, "\Phi^{\leq 1}_{abs}"] \arrow[d, "can"'] & F_* Ru_{X_0 *}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[d, "can"'] \\ \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0} \arrow[r, "DI^{\leq 1}"] & F_* DR_{X_0}. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Les propositions 3.3.3 et 3.4.2 nous donnent le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Ru_{X'_0*}(\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}) \arrow[rr, "can"] \arrow[dr, "DC'_2"] \arrow[dd, "\Phi^{\leq 1}_{abs}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \arrow[dl, "w"'] \arrow[dd, "DI^{\leq 1}"] \\
\arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & K^\bullet \arrow[dd, "\Phi^{\leq 1}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \\
F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0} \arrow[dr, "DC_2"] \arrow[ddr, "can"'] & & F_*\mathcal{C}_s^\vee(DR_{X_0}) \\
& E^\bullet \arrow[ur, "red"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
& F_*DR_{X_0}. \arrow[uur, "res"'] &
\end{tikzcd}$$

De ce diagramme on déduit les égalités de morphismes de complexes

$$\begin{aligned}
res \circ can \circ \Phi^{\leq 1}_{abs} &= red \circ DC_2 \circ \Phi^{\leq 1}_{abs} \\
&= red \circ \Phi^{\leq 1} \circ DC'_2 \\
&= red \circ \Phi^{\leq 1} \circ w \circ can \\
&= DI^{\leq 1} \circ can,
\end{aligned}$$

et donc que le diagramme précédent de morphismes dans les catégories dérivées ad hoc est commutatif. □

Le couple de flèches $DI^{\leq 1}$ et res définissent le morphisme $DI'^{\leq 1}$ de 2.6 dans la catégorie dérivée. En particulier, l'égalité des morphismes précédents montre l'égalité des morphismes dans $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$

$$can \circ \Phi^{\leq 1}_{abs} = DI'^{\leq 1} \circ can,$$

et donc le théorème 2.6.

Appliquons le foncteur $\sigma_{\leq 1}$ au diagramme précédent. Le morphisme tronqué $\sigma_{\leq 1}DI'^{\leq 1}$ est un quasi-isomorphisme : $\mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1] \to \sigma_{\leq 1}F_*DR_{X_0}$, puisque par passage à la cohomologie il coïncide avec l'isomorphisme de Cartier. Sous l'hypothèse de 1, que X_0 est un S_0-schéma projectif lisse, qui se relève modulo p^2, i.e. qui admet un relèvement projectif lisse sur S_1, nous en déduisons formellement le

Corollaire 3.4.4. *i Le morphisme de $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$, $\sigma_{\leq 1}\Phi^{\leq 1}_{abs} : Ru_{X'_0*}(\mathcal{J}_{X'_0/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X'_0/S_1}) \to \sigma_{\leq 1}F_*Ru_{X_0*}\mathcal{O}_{X_0/S_0}$ est un quasi-isomorphisme.*

ii Si X_0 est une courbe, le morphisme $\Phi^{\leq 1}_{abs}$ est un quasi-isomorphisme de $D^b(\mathcal{O}_{X'_0})$.

Terminons par une remarque, qui interviendra dans la section suivante. Appliquons maintenant $R^1\Gamma(X_0',.)$ (resp. $R^1\Gamma(X_0,.)$) au diagramme précédent, alors toutes les flèches deviennent des isomorphismes de groupes. De plus, le faisceau cristallin $\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}$ est réalisé sur X_1' par $\mathcal{M}^{[1]}_{X_1'} = \mathcal{O}_{X_0'} \bigoplus \Omega^1_{X_0'}[-1]$ (cf. 2.3.2). Du théorème précédent, nous tirons le

Corollaire 3.4.5. *i Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} H^1((X_0'/S_1),\mathcal{J}_{X_0'/S_1}/\mathcal{J}^{[2]}_{X_0'/S_1}) \arrow[r, "can", "\sim"'] \arrow[d, "\Phi^{\leq 1}_{abs}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1(X_0',\mathcal{O}_{X_0'}) \bigoplus H^0(X_0',\Omega^1_{X_0'}) . \arrow[d, "DI'^{\leq 1}"] \\ H^1_{cris}(X_0/S_0) \arrow[r, "can", "\sim"'] & H^1_{DR}(X_0) \end{tikzcd}$$

ii En particulier, si X_1 est muni d'un relèvement du Frobenius, les morphismes $\Phi^{\leq 1}$ réalisant $\Phi^{\leq 1}_{abs}$ sur $\mathcal{M}^{[1]}_{X_1'}$, et $DI'^{\leq 1} : H^1(X_0',\mathcal{O}_{X_0'}) \bigoplus H^0(X_0',\Omega^1_{X_0'}) \to H^1_{DR}(X_0)$, sont identiques.

4 Comparaison avec le Frobenius divisé de Mazur pour les courbes

Soit X_0 une courbe projective lisse sur $\operatorname{spec} k$, et X un relevé projectif et lisse sur $S = \operatorname{spec} W$. On pose $X' = X \times_S S$, où le produit est pris pour le relevé à S du morphisme de Frobenius sur k. On suppose que les groupes $H^p(X,\Omega^q_X)$ sont des W-modules libres pour $p,q \in \{0,1\}$ de rang fini, ce qui implique la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère d'après [Del68]. En particulier, on dispose de la suite exacte suivante pour X et X' :

$$0 \to H^0(X',\Omega^1_{X'}) \to H^1_{DR}(X') \to H^1(X,\mathcal{O}_{X'}) \to 0, \tag{10}$$

et les groupes de cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(X/S)$ sont sans torsion. De plus nous avons le lemme :

Lemme 4.1. *i* $\forall i \in \{0,1,2\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $H^i_{cris}(X_0/W_{n+1}) = H^i_{cris}(X/W) \otimes_W W_{n+1}$,

ii $\forall i \in \{0,1,2\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $H^i_{DR}(X \times S_n) = H^i_{DR}(X/W) \otimes_W W_{n+1}$,

iii $\forall i \in \{0,1\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $H^i(X,\mathcal{O}_X/p^{n+1}\mathcal{O}_X) = H^i(X,\mathcal{O}_X) \otimes_W W_{n+1}$,

iv $\forall i \in \{0,1\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $H^i(X,\Omega^1_X/p^{n+1}\Omega^1_X) = H^i(X,\Omega^1_X) \otimes_W W_{n+1}$

Démonstration. D'après le théorème de comparaison entre la cohomologie de de Rham $H^*_{DR}(X/S)$ et la cohomologie cristalline $H^*_{cris}(X_0/W)$, les groupes de cohomologie cristalline sont sans W-torsion. Donc, d'après 7.25 de [BO78], $H^i_{cris}(X_0/W_{n+1}) = H^i_{cris}(X/W)\otimes_W$

W_{n+1} pour tout $i \in \{0,1,2\}$. La deuxième assertion s'en déduit par comparaison entre cohomologie de de Rham et cohomologie cristalline. Pour les deux autres assertions, posons $\mathcal{F}$ l'un des faisceaux $\mathcal{O}_X$ ou Ω^1_X, alors on dispose de la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{F} \overset{\cdot p^{n+1}}{\to} \mathcal{F} \to \mathcal{F}/p^{n+1}\mathcal{F} \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée au foncteur $\Gamma(X,.)$ donne

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \overset{\cdot p^{n+1}}{\to} \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{F}/p^{n+1}\mathcal{F}) \to \\ H^1(X,\mathcal{F}) \overset{\cdot p^{n+1}}{\to} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F}/p^{n+1}\mathcal{F}) \to 0.$$

Comme $H^1(X,\mathcal{F})$ est libre sur W, cette suite exacte de scinde en deux suites exactes courtes, ce qui nous donne le résultat. □

Dans [Maz73], on trouve la construction suivante, que l'on détaille ici seulement dans le cas des courbes. Soient ι le morphisme canonique $H^0(X,\Omega^1_X) \to H^1_{DR}(X/W)$ et τ un scindage de la suite exacte 10. On note F_{DR} l'unique morphisme de groupes abéliens induit par le Frobenius cristallin, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H^1_{cris}(X'_0/W) \arrow[r, "can", "\sim"'] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1_{DR}(X'/S) \arrow[d, "F_{DR}"] \\ H^1_{cris}(X_0/W) \arrow[r, "can", "\sim"'] & H^1_{DR}(X/S). \end{tikzcd}$$

On note que $F_{DR}(\iota(H^0(X,\Omega^1_X))) \subset pH^1_{DR}(X/W)$. Le scindage τ permet de définir Φ^τ_M : $H^0(X',\Omega^1_{X'}) \bigoplus H^1(X',\mathcal{O}_{X'}) \to H^1_{DR}(X/S)$ par :

(i) $\forall \omega \in H^0(X',\Omega^1_{X'})$, $\Phi^\tau_M(\omega) = m_p^{-1} \circ (F_{DR}(\iota(\omega)))$,

(ii) $\forall \xi \in H^1(X',\mathcal{O}_{X'})$, $\Phi^\tau_M(\xi) = F_{DR}(\tau(\xi))$.

Lemme 4.2. *Il existe une unique application* $\overline{\Phi}_M : H^0(X'_0,\Omega^1_{X'_0}) \bigoplus H^1(X'_0,\mathcal{O}_{X'_0}) \to H^1_{DR}(X_0/S_0)$, *indépendante du choix de* τ *et faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} H^0(X',\Omega^1_{X'}) \bigoplus H^1(X',\mathcal{O}_{X'}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi^\tau_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^0(X'_0,\Omega^1_{X'_0}) \bigoplus H^1(X'_0,\mathcal{O}_{X'_0}) \arrow[d, "\overline{\Phi}_M"] \\ H^1_{DR}(X/S) \arrow[r, two heads] & H^1_{DR}(X_0/S_0). \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous laissons le lecteur vérifier que la flèche $\overline{\Phi}_M$ est bien définie. De plus, si τ' est un autre scindage de 10, notons $\overline{\Phi}^\tau_M$ le morphisme $\overline{\Phi}_M$ construit relativement à τ. Si $\xi \in H^1(X',\mathcal{O}_{X'})$, alors il existe $\eta \in H^0(X',\Omega^1_{X'})$ tel que $\tau(\xi) - \tau'(\xi) = \eta$, et donc $F_{DR}(\tau(\xi)) - F_{DR}(\tau'(\xi)) \in pH^1_{DR}(X/S)$, i.e. $\overline{\Phi}^\tau_M(\xi) = \overline{\Phi}^{\tau'}_M(\xi)$, de sorte que $\overline{\Phi}_M$ est indépendant de τ. □

Reprenons maintenant le morphisme $DI'^{\leq 1}$ introduit pour l'énoncé de 2.6, et qui est un morphisme de catégories dérivées : $\mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0} \to F_*DR_{X_0}$. Par passage au foncteur $R^1\Gamma(X'_0, .)$ (resp. $R^1\Gamma(X_0, .)$), nous obtenons un morphisme $DI'^{\leq 1}$: $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \bigoplus H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \to H^1_{DR}(X_0)$.

Le théorème est alors :

Théorème 4.3. *Soit X_0 une courbe projective lisse, les morphismes $\overline{\Phi}_M$ et $DI'^{\leq 1}$: $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \bigoplus H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \to H^1_{DR}(X_0)$ sont égaux.*

Démonstration. Montrons d'abord que les flèches coïncident en restriction à $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})$. Par construction, $DI'^{\leq 1}$ est donné par le passage à la cohomologie de la flèche composée donnée par le Frobenius : $F^{-1} : \mathcal{O}_{X'_0} \to F_*DR_{X_0} \stackrel{res}{\to} F_*\mathcal{C}^\vee_s(DR_{X_0})$, de sorte que $DI'^{\leq 1}$ correspond à $F : \mathcal{O}_{X'_0} \to F_*DR_{X_0}$. Pour calculer $\overline{\Phi}_M$ en restriction à $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})$, il suffit en fait de calculer l'action du Frobenius sur $H^1_{cris}(X_0/S_0)$, puisque dans ce cas on ne divise pas par p. Or, cette action induit le Frobenius usuel $F : H^1_{DR}(X'_0) \to H^1_{DR}(X_0)$, qui provient du morphisme de complexes $DR_{X'_0} \to F_*DR_{X_0}$. Nous calculons cette action en utilisant des complexes de Čech. Donnons-nous un recouvrement fini de X_0 par des ouverts affines $U_0, \ldots, U_n$. Alors le complexe de Čech du complexe de de Rham est le complexe

$$\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0}) : \ 0 \to \prod_i \mathcal{O}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_{i,j}) \bigoplus \prod_i \Omega(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_{i,j,k}) \bigoplus \prod_{i,j} \Omega(U_{i,j}) \to \cdots ,$$

et on dispose d'une projection vers le complexe de Čech de $\mathcal{O}_{X_0}$

$$\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0}) : \ 0 \to \prod_i \mathcal{O}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_{i,j}) \to \prod_{i,j} \mathcal{O}(U_{i,j,k}) \to \cdots .$$

Nous considérons les complexes de Čech analogues pour X'_0, $DR_{X'_0}$ et $\mathcal{O}_{X'_0}$. Un élément ξ de $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})$ est représenté par la classe $cl((h_{i,j}))$ dans le h^1 de $\mathcal{C}^\vee(\mathcal{O}_{X_0})$, où $h_{i,j} \in \mathcal{O}_{X'_0}(U_{i,j})$. Soient $\overline{((k_{i,j}), \omega_i)} \in H^1_{DR}(X'_0/S_0)$ un relèvement de cette classe, alors

$$\exists s \in H^0(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \,|\, \forall i,j,\, k_{i,j} - h_{i,j} = s_{|U_j} - s_{|U_i}, \quad \text{et}$$

$$F(\overline{((k_{i,j}), \omega_i)}) = \overline{((k_{i,j})^p, 0)} \in H^1_{DR}(X_0/S_0).$$

Or, $((k^p_{i,j}, 0)) - ((h^p_{i,j}, 0)) = d_0(s^p)$, est un bord de $\mathcal{C}^\vee(DR_{X_0})$ de sorte que $\overline{((k_{i,j})^p, 0)} = \overline{((h_{i,j})^p, 0)}$, ce qui dit précisément que $\overline{\Phi}_M(\xi)$ provient par passage à la cohomologie du morphisme $F : \mathcal{O}_{X'_0} \to F_*DR_{X_0}$, et que $\overline{\Phi}_M$ et $DI'^{\leq 1}$ coïncident en restriction à $H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})$.

Montrons maintenant que les flèches coïncident en restriction à $H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0})$. Soit ω un élément de $H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0})$. Pour calculer $\overline{\Phi}_M(\omega)$, il suffit en fait de relever ω dans $H^0(X'_1, \Omega^1_{X'_1})$. Pour calculer l'action du Frobenius cristallin sur cet élément, il est alors seulement nécessaire de calculer le Frobenius $F : H^1_{cris}(X'_0/S_1) \to H^1_{cris}(X_0/S_1)$. D'autre part, nous utilisons le théorème 2.6. Nous avons besoin des faisceaux introduits en 2.1, les faisceaux $Ru_{X'_0*}\mathcal{I}_{X'_0/S_1}$, $Ru_{X'_0*}\mathcal{I}_{X'_0/S_1}/\mathcal{I}^{[2]}_{X'_0/S_1}$, et leurs réalisations respectives sur X'_1 :

$$\mathcal{L}^{[1]}_{X'_1} \ : \ 0 \to p\mathcal{O}_{X'_1} \to \Omega^1_{X'_1} \to 0, \text{ et } \quad \mathcal{M}^{[1]}_{X'_1} = \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}[-1].$$

Le diagramme suivant décrit l'application l :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{X'_1}[-1] \arrow[r, "l'"] \arrow[rr, bend left, "l"] & \mathcal{L}^{[1]}_{X'_1} \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_{X'_0} \bigoplus \Omega^1_{X'_0}.
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Pour calculer le morphisme $\Phi^{\leq 1}$, nous devons faire intervenir un plongement projectif $X'_1 \to Y'_1$ où Y'_1 est isomorphe à un espace projectif $\mathbf{P}^n_{S_1}$, sur lequel on dispose d'un relèvement du Frobenius. Les faisceaux précédents se réalisent sur Y'_1. Il existe une injection canonique de complexes $\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_1} \to \mathcal{E}_{Y'_1}$. Soit F le morphisme de Frobenius induit par le Frobenius sur Y'_1 sur $\mathcal{E}_{Y'_1}$. D'après 2.4, la restriction de F à $\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_1}$ est à valeurs dans $p\mathcal{E}_{Y'_1}$, de plus, cette application se factorise en une application $\Phi^{\leq 1} : \mathcal{M}^{[1]}_{Y'_1} \to \mathcal{E}_{Y_0}$. On dispose donc de deux diagrammes commutatifs de complexes :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{[1]}_{Y'_1} \arrow[dr, "\Phi^{\leq 1}"] & \mathcal{L}^{[1]}_{Y'_1} \arrow[l] \arrow[d, "m_p^{-1}\circ F"] \\
 & \mathcal{E}_{Y_0}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_1} \arrow[r] \arrow[dr, "F"] & \mathcal{E}_{Y'_1} \arrow[d, "F"] \\
 & \mathcal{E}_{Y_1}.
\end{tikzcd}$$

L'immersion $X'_1 \hookrightarrow Y'_1$ donne des surjections canoniques de complexes : $\mathcal{M}^{[1]}_{Y'_1} \twoheadrightarrow \mathcal{M}^{[1]}_{X'_1}$, $\mathcal{L}^{[1]}_{Y'_1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}^{[1]}_{X'_1}$, $\mathcal{E}_{Y'_1} \twoheadrightarrow DR_{X'_1}$, que nous noterons génériquement S. Aux diagrammes précédents, nous pouvons appliquer $R^1\Gamma(X'_1, .)$ et $R^1\Gamma(X_1, .)$ et l'application S, pour obtenir l'action de $\Phi^{\leq 1}$ sur la cohomologie, ce qui donne les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(X'_1, \Omega^1_{X'_1}) \arrow[dl, "L"'] \arrow[d, "L'"] \\
R^1\Gamma(X'_1, \mathcal{M}^{[1]}_{X'_1}) \arrow[dr, "\Phi^{\leq 1}"] & R^1\Gamma(X'_1, \mathcal{L}^{[1]}_{X'_1}) \arrow[l] \arrow[d, "m_p^{-1}\circ F_{DR}"] \\
 & H^1_{DR}(X_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^1\Gamma(X'_1, \mathcal{L}^{[1]}_{X'_1}) \arrow[r] \arrow[dr, "F_{DR}"] & H^1_{DR}(X_1) \arrow[d, "F_{DR}"] \\
 & H^1_{DR}(X_1).
\end{tikzcd}$$

Le morphisme canonique $\Omega^1_{X'_1}[-1] \to \mathcal{E}_{X'_1}$ se factorise par $l : \Omega^1_{X'_1}[-1] \to \mathcal{L}^{[1]}_{X'_1}$ (cf. le diagramme 11). Soit $\omega \in H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0})$, et $\widetilde{\omega}$ un relevé de ω dans $H^0(X'_1, \Omega^1_{X'_1})$, alors, d'après 3.4.5,

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}_M(\omega) &= m_p^{-1} \circ F_{DR}(\iota(\widetilde{\omega})) \\ &= \Phi_1^{\leq 1} \circ L(\widetilde{\omega}) \\ &= DI'^{\leq 1} \circ L(\widetilde{\omega}) \\ &= DI'^{\leq 1}(\omega).\end{aligned}$$

□

5 Applications à la courbe de Drinfeld

Appliqué à certaines familles de courbes, notamment aux courbes de Drinfeld ou aux courbes hyperelliptiques [HW13], le résultat précédent permet de décrire un algorithme menant au calcul explicite du Frobenius divisé de Mazur sur $H^1_{DR}(X_0)$ via la méthode de Deligne-Illusie. Le calcul du (φ, Γ)-module associé repose alors essentiellement sur le calcul de l'inverse d'une matrice.

5.1 Généralités

La situation générale est celle décrite dans la section précédente, où X_0 est une courbe propre et lisse sur $\operatorname{spec} k$ se relevant en X projectif et lisse sur $\operatorname{spec} W$.

La cohomologie de de Rham est munie de l'endomorphisme de Frobenius F_{DR} et le choix d'un scindage τ de la suite exacte 10 détermine un isomorphisme

$$H^0(X', \Omega^1_{X'}) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \simeq H^1_{dR}(X').$$

On peut alors définir le Frobenius divisé

$$\Phi^\tau_M : H^0(X', \Omega^1_{X'}) \oplus H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \to H^1_{DR}(X)$$

et sa réduction modulo p,

$$\overline{\Phi}_M : H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0})(X'_0) \to H^1_{DR}(X_0),$$

qui ne dépend pas de τ.

D'autre part, le schéma X_1 étant un relèvement plat de X_0 sur W_2, l' application de Deligne et Illusie ([DI87])

$$f_{X_1} : \oplus_{0 \leq i < p} \Omega^i_{X'_0}[-i] \to F_* \Omega^{\cdot}_{X_0}$$

est un quasi-isomorphisme et induit l'isomorphisme

$$DI'^{\leq 1} : H^0(X'_0, \Omega^1_{X'_0}) \oplus H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) \to H^1_{dR}(X_0)$$

qui n'est autre que $\overline{\Phi}_M$ par le théorème 4.3.

Rappelons brièvement la méthode, qui utilise le complexe de Cech, dans le cas où la courbe X_0 admet un recouvrement $\mathcal{U}$ constitué de deux ouverts affines lisses notés U_0 et V_0. Ces deux ouverts se relèvent en U_1 et V_1 constituant un recouvrement affine lissse de X_1 sur W_2. Le Frobenius sur X_0 se relève alors séparément sur chacun des deux ouverts U_1 et V_1 en des application notées F_{U_1} et F_{V_1}. Notons $\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X_0})$ le complexe simple associé au bicomplexe de Cech du recouvrement $\mathcal{U}$. Le morphisme $\Omega^{\cdot}_{X_0} \to \check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X_0})$ est un quasi-isomorphisme et induit un isomorphisme

$$H^i_{dR}(X_0) \simeq H^i(\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X_0})).$$

De même $F_*\Omega^{\cdot}_{X_0} \to F_*\check{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \Omega^{\cdot}_{X_0})$ est un quasi-isomorphisme , d'où la description suivante de f_{X_1} :

- en degré 0, $f_{X_1} : \mathcal{O}_{X'_0} \to F_*\mathcal{O}_U \oplus F_*\mathcal{O}_V$ est l'application σ-linéaire de k-algèbres qui envoie x sur x^p.
- en degré 1, $f_{X_1} = (f_U, f_V, h) : \Omega^1_{X'_0} \to F_*\Omega^1_{U_0/k} \oplus F_*\Omega^1_{V_0/k} \oplus F_*\mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$ est induite par l'application qui localement vérifie

$$\begin{aligned} f_U(\omega) &= m_p^{-1}(dF_{U_1}(\omega_{|U}), \\ f_V(\omega) &= m_p^{-1}(dF_{V_1}(\omega_{|V}) \\ h(dx) &= m_p^{-1}(F_{V_1}(x) - F_{U_1}(x)). \end{aligned}$$

On peut alors identifier $H^1_{DR}(X_0)$ à l'ensemble des classes de triplets $\bar{\eta}$ de représentants

$$\eta = (\omega_U, \omega_V, h) \in \Omega^1_{U_0/k} \times \Omega^1_{V_0/k} \times \mathcal{O}_{U_0 \cap V_0}$$

tels que $(\omega_U)_{|U_0 \cap V_0} - (\omega_V)_{|U_0 \cap V_0} + dh = 0$, avec pour relations $\bar{\eta} = 0$ si h s'étend en une fonction définie sur U_0 ou V_0.

5.2 Cohomologie de de Rham des courbes de Drinfeld

Soit n un entier strictement positif, posons $q = p^n$; dans cette partie, k est un corps parfait contenant $\mathbf{F}_{q^2}$ et W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. Le représentant de Teichmüller fournit un plongement naturel de $\mathbf{F}^{\times}_{q^2}$ dans W.

On considère la courbe C_k projective et lisse sur $\mathbf{F}_p$, d'équation

$$XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$$

dans $\mathbf{P}^2$. Le groupe $SL_2(q)$ agit sur $\mathbf{P}^2_k$ via $g \mapsto \begin{pmatrix} & & 0 \\ & g & \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et cette action laisse stable C_k. De plus, si F désigne le Frobenius géométrique agissant sur C_k, les actions de F^n

et de $SL_2(q)$ sur C_k commutent. On dispose également d'une action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ sur C_k via $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La courbe C_k peut-être recouverte par deux ouverts affines

$$U_0 = \operatorname{spec} k[u_1, u_2] = \operatorname{spec} k[Y, Z]/(Y^q - Y - Z^{q+1})$$
$$V_0 = \operatorname{spec} k[v_1, v_2] = \operatorname{spec} k[X, Z]/(X - X^q - Z^{q+1})$$

avec les changements de carte $u_1 = \frac{1}{v_1}$ et $v_2 = \frac{u_2}{u_1}$.

Notons C_W la courbe projective et lisse d'équation $XY^q - X^qY - Z^{q+1} = 0$ dans $\mathbf{P}^2_W$; c'est un relèvement de C_k sur W, qui peut aussi être recouvert par deux ouverts affines notés $U_W = \operatorname{spec} W[u_1, u_2]$ et $V_W = \operatorname{spec} W[v_1, v_2]$. L'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ se relève en une action sur C_W.

Lemme 5.2.1. *i Le Frobenius se relève sur l'ouvert U_1 en une application F_{U_1} définie sur les générateurs par*

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p(1 - \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \tbinom{p}{l} u_1^{(q-1)(p-l)}) \text{ et } F_{U_1}(u_2) = u_2^p.$$

ii Le Frobenius se relève sur l'ouvert V_1 en une application F_{V_1} définie sur les générateurs par

$$F_{V_1}(v_1) = v_1^p(1 - \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \tbinom{p}{l} v_1^{(q-1)l}) \text{ et } F_{V_1}(v_2) = v_2^p.$$

Démonstration. On recherche un relèvement sous la forme

$$F_{U_1}(u_1) = u_1^p(1 + pK(u_1))$$

et $F_{U_1}(u_2) = u_2^p$, et l'on obtient $K(u_1) = -\sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_1^{(q-1)(p-l)}$. □

En utilisant le recouvrement ci-dessus et la cohomologie de Cech, Haastert et Jantzen démontrent la proposition suivante ([HJ90] corollary 2.2 et proposition 2.3), où A représente k, W ou plus généralement un anneau noethérien intègre dans lequel $q^2 - 1$ est inversible.

Proposition 5.2.2. *i Le A-module $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})$ est libre de base*

$$\{u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2\ ,\ a \in \mathbf{N},\ b \in \mathbf{N},\ a + b \leq q - 2\};$$

ii Le A-module $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})$ est libre de base

$$\{[u_1^{-a} u_2^b]\ , 1 \leq a < b \leq q\}.$$

L'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ permet de décomposer la cohomologie de de Rham et les groupes de cohomologie de Hodge en sous-espaces propres. Plus précisément, notons $\psi(j)$, pour $j \in \mathbf{Z}$, le caractère de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ défini par $\alpha \mapsto \alpha^j$.

Proposition 5.2.3. *Les décompositions suivantes sont des décompositions en espaces propres de dimension* 1 *pour l'action de* $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ *:*

i $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A}) = \bigoplus_{\substack{i,j\in\mathbf{N}^* \\ i+j\leq q}} H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$;

ii $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A}) = \bigoplus_{\substack{i,j\in\mathbf{N}^* \\ i+j\leq q}} H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})_{\psi(i-qj)}$;

iii $H^1_{DR}(C_A) = \bigoplus_{\substack{i,j\in\mathbf{N}^* \\ i+j\leq q}} \big(H^1_{DR}(C_A)_{\psi(-i+qj)} \oplus H^1_{DR}(C_A)_{\psi(i-qj)}\big)$.

Remarques 5.2.4. *i)* On vérifie que les caractères aparaissant en i) et ii) sont tous distincts.

ii) On constate que $\mu = \{\alpha \in \mathbf{F}_{q^2}^\times \mid \alpha^{q+1} = 1\}$ agit sur les ouverts affines et, pour $\alpha \in \mu$, $\alpha(u_1) = [\alpha]^{-(q+1)}u_1 = u_1$ et $\alpha(u_2) = [\alpha]^{-1}u_2$; on en déduit que, pour $1 \leq a < b \leq q$, la classe $[u_1^{-a}u_2^b]$ est un générateur de $H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$ en posant $i = b - a$ et $j = a$.

iii) De la même manière, on obtient un générateur de $H^0(C_A, \Omega^1_{C_A})_{\psi(i-qj)}$ en considérant $u_1^a u_2^b (qu_1^{q-1} - 1)^{-1} du_2$ avec les relations $i = q - 1 - a - b$ et $j = 1 + a$.

iv) La proposition permet de construire un scindage naturel de la suite exacte courte (10) : pour $u \in H^1(C_A, \mathcal{O}_{C_A})_{\psi(-i+qj)}$, choisissons $\tau(u)$ comme l'unique élément de $H^1_{DR}(C_A)_{\psi(-i+qj)}$ d'image u par la surjection. Le scindage τ étant fixé, nous noterons dorénavant $\overline{\Phi}_M = \overline{\Phi}_M^\tau$ et nous l'assimilons à une application de $H^1_{DR}(C'_A)$ vers $H^1_{DR}(C_A)$.

5.3 Calcul du Frobenius divisé

Choisissons, pour chaque couple d'entiers strictement positifs (i,j) tels que $i + j \leq q$, le générateur $v(i,j) = u_1^{j-1}u_2^{q-(i+j)}(qu_1^{q-1} - 1)du_2$ (cf remarque 5.2.4 *iii)*) du W-module $H^0(C_W, \Omega^1_{C_W})_{\psi(i-qj)}$ libre de rang 1 ; l'ensemble $\{v(i,j) \mid 1 \leq i,j \text{ et } i + j \leq q\}$ est une base de $H^0(C_W, \Omega^1_{C_W})$. De même choisissons le générateur $v(-i,-j) = \tau([u_1^{-j}u_2^{i+j}])$ (cf remarques 5.2.4 *ii)* et *iv)*) du W-module $H^1_{DR}(C_W)_{\psi(-i+qj)}$ libre de rang 1.

Le fait de remarquer que si $v \in H^1_{DR}(C_W)_{\psi(m)}$, alors $F_{DR}(v) \in H^1_{DR}(C_W)_{\psi(pm)}$, permet à Haastert et Jantzen de décrire comment l'action du Frobenius échange les espaces propres pour l'action de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$ ([HJ90] proposition 3.5). On sait alors quels coefficients de la matrice du Frobenius dans la base $(v(i,j), v(-i,-j))$ ne sont pas nuls, sans les calculer. Nous proposons ici un calcul explicite modulo p des coefficients du Frobenius divisé.

Avertissement : les éléments $v(i,j)$ (respectivement $v(-i,-j)$ présents dans cet article correspondent à $v(i-1, j-1)$ (respectivement $v(-(i-1), -(j-1))$ de [HJ90]. Moyennant ce décallage, il n'est pas difficile (mais fastidieux) de vérifier que les calculs ci-dessous sont cohérents avec les résultats de *loc. cit.*.

5.3.1 Algorithme On travaille dans l'anneau $A = W[u_1, u_2, v_1]$, où u_1, u_2 et v_1 vérifient les relations $u_1^q - u_1 - u_2^{q+1} = 0$ et $u_1 v_1 - 1 = 0$. Les calculs impliqués sont des calculs de polynômes dérivés et des combinaisons linéaires. La taille de la matrice, qui est $q(q-1) = p^n(p^n - 1)$, grossit très vite en fonction de n, mais on sait a priori qu'il n'y a que $q(q-1)$ coefficients non nuls.

Etape 1 – Pour i et j entiers compris entre 1 et $q-1$ tels que $i + j \leq q$, on détermine d'abord un triplet représentant $v(-i,-j)$ dans le complexe de Cech. Pour cela on calcule la différentielle $d(v_1^j u_2^{i+j})$, puis on la décompose en une somme $d(v_1^j u_2^{i+j}) = \omega_U(-i,-j) + \omega_V(-i,-j)$ où ω_U (respectivement ω_V) est défini sur l'ouvert U (respectivement sur V). Le triplet recherché est $(-\omega_U(-i,-j), \omega_V(-i,-j), v_1^j u_2^{i+j})$.

Etape 2 – Calcul de $\overline{\Phi}_M(v(-i,-j))$. On calcule les coefficients a_l et b_l tels que

$$v_1^{pj} u_2^{p(i+j)} = \sum_{l \geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

dans l'anneau A, où b est le reste de la division euclidienne de $p(i+j)$ par $q+1$. On pose $h = \sum_{l=1}^{b-1} b_l v_1^l u_2^b$.

Si $h \neq 0$, il existe un unique entier l tel que $h = b_l v_1^l u_2^b$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = b_l v(-(b-l), -l).$$

Si $h = 0$, on pose $h_U = \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$ et on calcule $d(h_U)$. Il existe un unique couple d'entiers (l, m) et $\alpha \in k$ tels que $d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \alpha v(q-1-m-l, l+1).$$

Etape 3 – Calcul de $\overline{\Phi}_M(v(i,j))$. On calcule

$$h_{ij} = u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)} \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} v_1^{l(q-1)},$$

puis, comme dans l'étape 2, les coefficients a_l et b_l tels que

$$h_{ij} = \sum_{l \geq 1} b_l v_1^l u_2^b + \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$$

où b est le reste de la division euclidienne de $p(q-i-j+1)$ par $q+1$. On obtient $h_{ij} = h_U + h_V + h$ comme ci-dessus.

Si $h \neq 0$, il existe un unique entier l tel que $h = b_l v_1^l u_2^b$. On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(i,j)) = b_l v(-(b-l), -l).$$

Si $h = 0$, on pose $h_U = \sum_{l \geq 0} a_l u_1^l u_2^b$ et on calcule $d(h_U)$. Il existe un unique couple d'entiers (l, m) et $\alpha \in k$ tels que

$$-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} + d(h_U) = -\alpha u_1^l u_2^m du_2.$$

On a alors

$$\overline{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \alpha v(q-1-m-l, l+1).$$

La programmation de cet algorithme permet de déterminer $\overline{\Phi}_M$ une fois fixées les valeurs de p et n. Il est possible de décrire en toute généralité $\overline{\Phi}_M$, ce qui va être exposé dans le reste de cette partie.

5.3.2 Calculs préliminaires Pour tout α compris entre 1 et q, notons $\alpha = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l p^l$ la décomposition en base p de α, avec $0 \leq \alpha_l \leq p-1$.

Lemme 5.3.2.1. *Considérons a et b le quotient et le reste de la division euclidienne de $p\alpha$ par $q+1$.*

a) $a \leq p-1$, $1 \leq b \leq q$ et ($b = q \Rightarrow \alpha = p^{n-1}$) ;

b) si $n \geq 2$ et $\alpha \not\equiv 0$ (p^{n-1}), alors $a = \alpha_{n-1}$;

c) si $n = 1$ ou $\alpha \equiv 0$ (p^{n-1}), alors $a = \alpha_{n-1} - 1$.

Démonstration. a) Puisque $1 \leq \alpha \leq q$, on a $p \leq a(q+1) + b \leq pq$. On en déduit que $0 \leq a \leq p-1$. Si $b = 0$ ou $b = q$, alors p divise a, ce qui n'est possible que si $a = 0$; comme $\alpha \neq 0$, on obtient le résultat.

b) Si $n \geq 2$ et $\alpha \not\equiv 0$ (p^{n-1}), alors $\alpha_n = 0$, $\sum_{l=0}^{n-2} \alpha_l p^{l+1} \geq p$ et

$$\begin{aligned} p\alpha &= \alpha_{n-1}p^n + \alpha_{n-1} + \sum_{l=0}^{n-2} \alpha_l p^{l+1} - \alpha_{n-1} \\ &= \alpha_{n-1}(q+1) + \sum_{l=0}^{n-2} \alpha_l p^{l+1} - \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

avec $1 \leq \sum_{l=0}^{n-2} \alpha_l p^{l+1} - \alpha_{n-1} \leq q-1$. On en déduit

$$a = \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad b = \sum_{l=0}^{n-2} \alpha_l p^{l+1} - \alpha_{n-1}.$$

c) Si $n = 1$ ou $\alpha \equiv 0$ (p^{n-1}), alors $\alpha = \alpha_{n-1}p^{n-1}$, avec $\alpha_{n-1} \geq 1$, ou $\alpha = q$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} p\alpha &= \big(\alpha_{n-1} - 1\big)p^n + (\alpha_{n-1} - 1) + p^n + 1 - \alpha_{n-1} \\ &= \big(\alpha_{n-1} - 1\big)\big(q+1\big) + q + 1 - \alpha_{n-1}, \end{aligned}$$

où $1 \leq q + 1 - \alpha_{n-1} \leq q$ (pour simplifier la discussion, on convient que $\alpha_{n-1} = p$ si $\alpha = q$). On en déduit

$$a = \alpha_{n-1} - 1 \quad \text{et} \quad b = q + 1 - \alpha_{n-1}.$$

$\square$

Considérons à présent r_0 le plus grand entier compris entre 0 et a tel que $0 < pm - a - r(q-1)$ et r_1 le plus grand entier compris entre $-a$ et $p-1$ tel que $0 \leq pm + a - r(q-1)$.

Lemme 5.3.2.2. *i Si $n \geq 2$ et $m \not\equiv 0$ (p^{n-1}), alors $r_0 = m_{n-1}$; sinon, lorsque $a \neq m_{n-1}$, $r_0 = m_{n-1} - 1$.*

ii Si $n \geq 2$ et $m + 1 \not\equiv 0$ (p^{n-1}) ou $a + 1 + m_{n-1} < p$, alors $r_1 = m_{n-1}$; sinon $r_1 = m_{n-1} + 1$.

Démonstration. (i) Lorsque $0 \leq r \leq a$ et $m \not\equiv 0$ (p^{n-1}), l'expression

$$pm - a - r(q-1) = (m_{n-1} - r)q + \sum_{l=0}^{n-2} m_l p^{l+1} - (a - r)$$

est strictement positive si $r \leq m_{n-1}$. On conclut que $r_0 = m_{n-1}$.

Si $m = m_{n-1}p^{n-1}$, alors $pm - a - r(q-1) = (m_{n-1} - r)q - (a - r) > 0$ pour $r \leq m_{n-1} - 1$; d'où le résultat.

(ii) Pour $-a \leq r \leq m_{n-1}$, l'expression

$$pm + a - r(q-1) = (m_{n-1} - r)q + \sum_{l=0}^{n-2} m_l p^{l+1} + a + r$$

est positive ou nulle.

Pour $r = m_{n-1} + 1$, l'expression est positive ou nulle si $\sum_{l=0}^{n-2} m_l p^{l+1} + a + m_{n-1} + 1 \geq q$; comme $1 \leq a + 1 + m_{n-1} \leq p + (p-1)$, ceci n'est possible que si $m_l = p - 1$ pour $0 \leq l \leq n-2$ et $a + 1 + m_{n-1} \geq p$. □

5.3.3 Calcul de l'action du Frobenius sur la famille $(v(-i,-j))$ Pour i et j des entiers strictement positifs tels que $i + j \leq q$, posons

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i_{n-1}} \binom{i_{n-1} + j_{n-1}}{j_{n-1}}.$$

Proposition 5.3.3.1. *i Si $p(i+j) \leq q$, alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = v(-pi, -pj).$$

ii Si $n \geq 2$, $p(i+j) > q$, $i \not\equiv 0 (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0 (p^{n-1})$ et si $i + j$ vérifie l'une des conditions suivantes

$$(i+j)_{n-1} = i_{n-1} + j_{n-1} \text{ ou } i + j \equiv 0 \ (p^{n-1}),$$

alors

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = \gamma_{ij} v(-i', -j')$$

où

$$i' \equiv \sum_{l=0}^{n-2}((i+j)_l - j_l)p^{l+1} - j_{n-1}\ (q)$$

et

$$j' \equiv \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} - i_{n-1}\ (q).$$

Démonstration. Pour tout couple (i,j), l'image de $v(-i,-j)$ dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$ est la classe $[u_1^{-j}u_2^{i+j}]$ et l'action de F sur $\mathcal{O}_{C_k}$ est l'élévation à la puissance p. Puisque la suite exacte (10) a un scindage naturel, pour connaître $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))$, il suffit de déterminer la classe de $[u_1^{-jp}u_2^{p(i+j)}]$ dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$, lorsque celle-ci n'est pas nulle, en fonction de la base de la proposition 5.2.2.

(i) Supposons $p(i+j) \le q$; dans ce cas, $[F(u_1^{-j}u_2^{i+j})] = [u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)}]$ est un générateur de $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})_{\psi(-pi+qp(i+j))}$ et l'on obtient

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = v(-pi,-pj).$$

(ii) Supposons à présent $p(i+j) > q$ et effectuons la division euclidienne de $p(i+j)$ par $q+1$; on obtient $p(i+j) = a(q+1)+b$ avec $1 \le a \le p-1$ et $1 \le b \le q-1$ par le lemme 5.3.2.1. Alors

$$u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)} = u_1^{-pj}u_2^b(u_1^q - u_1)^a = \sum_{r=0}^{a}(-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}\, u_1^{a-pj+r(q-1)}u_2^b.$$

Les termes dont la classe n'est pas nulle dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$ sont ceux tels que

$$1 \le pj - a - r(q-1) < b.$$

Puisque $1 \le b \le q-1$, il existe au plus un entier r tel que $0 < pj - a - r(q-1) < b$ et s'il en existe un, c'est l'entier r_0 calculé dans le lemme 5.3.2.2, avec $\alpha = i+j$ et $m = j$.

Cherchons à quelle condition l'inégalité $pj - a - r_0(q-1) < b$ est vérifiée et voyons ce que l'on obtient en fonction des conditions des lemmes 5.3.2.1 et 5.3.2.2. Or

$$\begin{aligned} pj - a - r_0(q-1) - b &= p(i+j) - b - r_0 q - pi - a + r_0 \\ &= (a - r_0 - i_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_0. \end{aligned}$$

Cas 1. Lorsque $i+j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$ (alors $a = (i+j)_{n-1}$) :

- si $j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$ et si $i \not\equiv 0\ (p^{n-1})$, alors

$$-q < -\sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_0 < 0, \quad r_0 = j_{n-1}$$

et on constate que

$$pj-(i+j)_{n-1}-j_{n-1}(q-1)-b=((i+j)_{n-1}-j_{n-1}-i_{n-1})q-\sum_{l=0}^{n-2}i_lp^{l+1}+r_0<0$$

si et seulement si $i_{n-1}+j_{n-1}=(i+j)_{n-1}$. Dans ce cas,

$$b=\sum_{l=0}^{n-2}(i+j)_lp^{l+1}-(i_{n-1}+j_{n-1})$$

$$\text{et}\qquad a-pj+r_0(q-1)=-\sum_{l=0}^{n-2}j_lp^{l+1}+i_{n-1}\ ;$$

on obtient une partie du point (ii) de la proposition :

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))=(-1)^{i_{n-1}}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}}v(-i',-j').$$

- si $j\not\equiv 0\ (p^{n-1})$ et si $i\equiv 0\ (p^{n-1})$, alors on a nécessairement $i_{n-1}+j_{n-1}=(i+j)_{n-1}$ et $pj-a-r_0(q-1)-b=r_0\geq 0$. L'image par F de $v(-i,-j)$ se trouve dans $H^0(C_k,\Omega^1_{C_k})$ (voir proposition 5.3.3.2 ci-dessous).
- si $j\equiv 0\ (p^{n-1})$, alors on a aussi $i_{n-1}+j_{n-1}=(i+j)_{n-1}$ et $i\not\equiv 0\ (p^{n-1})$; dans ce cas,

$$pj-a-r_0(q-1)-b=q-\sum_{l=0}^{n-2}i_lp^{l+1}+j_{n-1}-1\geq 0.$$

L'image par F de $v(-i,-j)$ se trouve dans $H^0(C_k,\Omega^1_{C_k})$ (voir proposition 5.3.3.2 ci-dessous).

Cas 2. Lorsque $i+j\equiv 0\ (p^{n-1})$ (dans ce cas $a=(i+j)_{n-1}-1$) :

- si $j\not\equiv\ 0(p^{n-1})$, alors $i\not\equiv\ 0(p^{n-1})$, $(i+j)_{n-1}=i_{n-1}+j_{n-1}+1$ et $-\sum_{l=0}^{n-2}i_lp^{l+1}+r_0<0$; on constate que

$$pj-(i+j)_{n-1}+1-j_{n-1}(q-1)-b=-\sum_{l=0}^{n-2}i_lp^{l+1}+r_<0.$$

Dans ce cas, $a-pj+r_0(q-1)=-\sum_{l=0}^{n-2}j_lp^{l+1}+i_{n-1}$; on obtient comme ci-dessus

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))=(-1)^{i_{n-1}}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}}v(-i',-j'),$$

ce qui termine le point (ii) de la proposition.

- si $j\equiv 0\ (p^{n-1})$, alors $i\equiv 0\ (p^{n-1})$; on a nécessairement $i_{n-1}+j_{n-1}=(i+j)_{n-1}$ et $pj-a-r_0(q-1)-b=r_0\geq 0$. L'image par F de $v(-i,-j)$ se trouve dans $H^0(C_k,\Omega^1_{C_k})$ (voir proposition 5.3.3.2 ci-dessous). □

Etudions dans le cas restant où l'image de $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))$ est nulle dans $H^1(C_k, \mathcal{O}_{C_k})$. Posons

$$\begin{aligned}
i'' &\equiv q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + j_{n-1} + 1 \ (q) \text{ si } n \geq 2 \text{ et } j \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \\
&\equiv q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + j_{n-1} \ (q) \text{ sinon} \\
j'' &\equiv q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + i_{n-1} + 1 \ (q) \text{ si } n \geq 2 \text{ et } i \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \\
&\equiv q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + i_{n-1} \ (q) \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

Proposition 5.3.3.2. *Supposons $n = 1$ ou $p(i+j) > q$. Si i et j ne vérifient pas l'une des conditions du point (ii) de la proposition 5.3.3.1, alors*

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) \in H^0(C_k, \Omega^1_{C_k}).$$

Plus précisément, $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = c_{i,j} v(i'', j'')$ où

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= -\gamma_{ij}(i_{n-1} + j_{n-1} + 1) \text{ si } n \geq 2 \text{ , } i \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \\
&= \gamma_{ij} i_{n-1} \text{ si } n \geq 2 \text{ , } i \equiv 0 \ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \\
&= -\gamma_{ij} j_{n-1} \text{ si } n \geq 2 \text{ , } i \not\equiv 0 \ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0 \ (p^{n-1}) \\
&= \gamma_{ij} \frac{i_{n-1} j_{n-1}}{i_{n-1} + j_{n-1}} \text{ si } n = 1 \text{ ou } i \equiv 0 \ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0 \ (p^{n-1}).
\end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons qu'un élément de $H^1_{DR}(C_k)$ peut être représenté dans le complexe de Cech relativement aux deux ouverts U et V par un triplet (ω_U, ω_V, f) dans

$$H^0(U_k, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(V_k, \Omega^1_{C_k}) \times H^0(U_k \cap V_k, \mathcal{O}_{C_k})$$

tel que $\omega_U - \omega_V + df = 0$. Le sous-espace $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$ s'identifie aux triplets tels que $f = 0$.

On vérifie facilement que $(0, 0, u_1^{-pj} u_2^{p(i+j)})$ représente un élément de $H^1_{DR}(C_k)$ que l'on sait être dans $H^0(C_k, \Omega^1_{C_k})$ sous les conditions de la proposition.

Rappelons que pour $0 \leq r \leq r_0$, on a $pj - a - r(q-1) > 0$ et que nous sommes dans le cas où $pj - a - r_0(q-1) \geq b$; alors

$$f_U = \sum_{r=r_0+1}^{a} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)} u_2^b \in H^0(U_k, \mathcal{O}_{C_k})$$

et

$$f_V = \sum_{r=0}^{r_0} (-1)^{a-r} \binom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)} u_2^b \in H^0(V_k, \mathcal{O}_{C_k}).$$

On a aussi $f = u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)} = f_U + f_V$ et $d(u_1^{-pj}u_2^{p(i+j)}) = 0 = df_U + df_V$. On obtient

$$(0,0,f) = (-df_U, 0, f_U) + (0, df_V, f_V) + (df_U, -df_V, 0)$$

et le fait que $(df_U, -df_V, 0)$ représente la même classe que $(0,0,f)$ dans $H^1_{DR}(C_k)$.

Calculons

$$\begin{aligned}
df_U &= d(\sum_{r=r_0+1}^{a} (-1)^{a-r}\tbinom{a}{r} u_1^{a-pj+r(q-1)}u_2^b) \\
&= \sum_{r=r_0+1}^{a} (-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}\left(-(a-r)u_1^{a-1-pj+r(q-1)}u_2^{b+q} + bu_1^{a-pj+r(q-1)}u_2^{b-1}\right)du_2 \\
&= \sum_{r=r_0+1}^{a} (-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}\left(-(a-r)u_1^{a-pj+(r+1)(q-1)} + (b+a-r)u_1^{a-pj+r(q-1)}\right)u_2^{b-1}du_2 \\
&= \sum_{r=r_0+1}^{a-1} (-1)^{a-r-1}(a+b)\tbinom{a}{r+1}u_1^{a-pj+(r+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2 \\
&\quad + (-1)^{a-r_0-1}\tbinom{a}{r_0+1}(a-r_0-1+b)u_1^{a-pj+(r_0+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2.
\end{aligned}$$

Or $a+b = p(i+j) - qa \equiv 0\ (p)$, d'où

$$df_U = (-1)^{a-r_0}\tbinom{a}{r_0+1}(r_0+1)u_1^{a-pj+(r_0+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2.$$

On vérifie que l'on est bien dans le cas où

$$a - pj + (r_0+1)(q-1) + b - 1 = pi - aq + (r_0+1)q - (r_0+1) \leq q-2.$$

Par la remarque (iii) de 5.2.4, $u_1^{a-pj+(r_0+1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2$ définit le même espace propre pour l'action de $\mathbf{F}_{q^2}^{\times}$ que $v(i',j')$ où

$$\begin{aligned}
i' &= q - 1 - (a - pj + (r_0+1)(q-1) + b - 1) \\
&= (a - r_0 - i_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_0 + 1 \\
\text{et } j' &= 1 + a - pj + (r_0+1)(q-1) \\
&= (r_0 + 1 - j_{n-1})q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + a - r_0.
\end{aligned}$$

Pour finir, explicitons $\bar{\Phi}_M(v(-i,-j))$ en fonction des différentes situations :

- Si $i+j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$, $i \not\equiv 0\ (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$ et $(i+j)_{n-1} \neq i_{n-1} + j_{n-1}$, rappelons que $a = (i+j)_{n-1} = i_{n-1} + j_{n-1} + 1$ et $r_0 = j_{n-1}$. On en déduit que

$$i' = q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + j_{n-1} + 1 = i''$$

et

$$j' = q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + i_{n-1} + 1 = j'',$$

puis que

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = (-1)^{i_{n-1}+1}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}+1}{j_{n-1}+1}(j_{n-1}+1)v(i'',j'').$$

- Si $i+j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$ et $i \equiv 0\ (p^{n-1})$, rappelons que $a = (i+j)_{n-1} = i_{n-1}+j_{n-1}$ et $r_0 = j_{n-1}$. On en déduit que

$$i' = j_{n-1} + 1 \equiv i''\ (q)$$

et

$$j' = q - \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} + i_{n-1} = j'',$$

puis que

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = (-1)^{i_{n-1}}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}+1}(j_{n-1}+1)v(i'',j'').$$

- Si $i+j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$ et $j \equiv 0\ (p^{n-1})$, rappelons que $a = (i+j)_{n-1} = i_{n-1}+j_{n-1}$ et $r_0 = j_{n-1} - 1$. On en déduit que

$$i' = q - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + j_{n-1} = i''$$

et

$$j' = i_{n-1} + 1 \equiv j''\ (q),$$

puis que

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = (-1)^{i_{n-1}+1}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}}{j_{n-1}}j_{n-1}v(i'',j'').$$

- Si $i+j \equiv 0\ (p^{n-1})$ et $j \equiv 0\ (p^{n-1})$, alors $a = (i+j)_{n-1} = i_{n-1}+j_{n-1}-1$ et $r_0 = j_{n-1}-1$. On en déduit que

$$i' = j_{n-1} \equiv i''\ (q) \text{ et } j' = i_{n-1} \equiv j''\ (q)$$

puis que

$$\bar{\Phi}_M(v(-i,-j)) = (-1)^{i_{n-1}}\binom{i_{n-1}+j_{n-1}-1}{j_{n-1}}j_{n-1}v(i'',j'').$$

□

5.3.4 Calcul du Frobenius divisé sur la famille $(v(i,j))$ Rappelons que l'élément $v(i,j) = -u_1^{j-1}u_2^{q-i-j}du_2$, pour i et j strictement positifs tels que $i+j \leq q$, peut être représenté dans le complexe de Cech par le triplet $(-u_1^{j-1}u_2^{q-i-j}du_2, -v_1^{i-1}v_2^{q-i-j}dv_2, 0)$. Son image par l'application de Deligne-Illusie est représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)}u_2^{p(q-i-j)}u_2^{p-1}du_2, -v_1^{p(i-1)}v_2^{p(q-i-j)}v_2^{p-1}dv_2, h_{ij})$$

où

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}.$$

Reprenons les notations des calculs préliminaires (5.3.2.1 et 5.3.2.2), pour $\alpha = q-i-j+1$ et $m = j-1$. Les lettres a et b désignent respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de $p\alpha$ par $q+1$ et r_1 le plus grand entier r tel que $0 \leq p(j-1)+a-r(q-1)$. Un calcul rapide aboutit à

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= p-(i+j)_{n-1}-1 \text{ si } i+j \not\equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } p^{n-1} \\ &= p-(i+j)_{n-1} \text{ si } i+j \equiv 0 \text{ ou } 1 \text{ modulo } p^{n-1}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} a &= p-1-(i+j)_{n-1} \text{ si } i+j \not\equiv 0 \text{ modulo } p^{n-1} \\ &= p-(i+j)_{n-1} \text{ si } i+j \equiv 0 \text{ modulo } p^{n-1}. \end{aligned}$$

Lemme 5.3.4.1. *i Si $j \geq q-p^{n-1}+1$, alors h_{ij} est définie sur U.*

ii Si $i \geq q-p^{n-1}+1$, alors h_{ij} est définie sur V.

iii Si $i \leq q-p^{n-1}$, $j \leq q-p^{n-1}$ et $(r_1+1)(q-1)-a-p(j-1) \geq b$, alors $h_{ij} = h_U + h_V$ où h_U (respectivement h_V) est une fonction définie sur U (respectivement sur V).

iv Si $i \leq q-p^{n-1}$, $j \leq q-p^{n-1}$ et $(r_1+1)(q-1)-a-p(j-1) < b$, alors

$$h_{ij} = h_U + c_{ij} u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(r_1+1)(q-1)} + h_V$$

où h_U (respectivement h_V) est une fonction définie sur U (respectivement sur V), $u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(r_1+1)(q-1)}$ est définie uniquement sur $U \cap V$ et le coefficient vaut

$$c_{ij} = (-1)^{a+r_1+1} \sum_{l=r_1+1}^{\min(p-1,a+r_1+1)} \frac{\binom{p}{l}}{p} \binom{a}{l-r_1-1}.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u_1^r u_2^s$ est définie sur U lorsque r et s sont positifs, est définie sur V lorsque $r < 0$ et $s \leq -r$. On en déduit les cas (i) et (ii).

Les cas (iii) et (iv) reposent sur l'égalité

$$u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)} = u_2^b (u_1^{q-1}-1)^a u_1^{a+p(j-1)-l(q-1)}$$

et le fait que lorsque $1 \leq s \leq q$ et $0 < -r < s$, alors la fonction $u_1^r u_2^s$ est définie uniquement sur $U \cap V$. □

Le signe de $a+p(j-1)-(r_1+1)(q-1)+b = q(p-r_1-1-a-i_{n-1}) - \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} + r_1 + 1$ est positif dans les cas suivants :

i $i \equiv 0 \ (p^{n-1})$;

ii $j \equiv 0 \ (p^{n-1})$;

iii $i \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$, $i+j \not\equiv 0 \ (p^{n-1})$ et $(i+j)_{n-1} = i_{n-1} + j_{n-1} + 1$.

Pour l compris entre $j_{n-1}+1$ et $p - i_{n-1}$, posons

$$\rho_{ij}(l) = (-1)^{p-i_{n-1}} \frac{\binom{p}{l}}{p} \tbinom{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}}{l-j_{n-1}-1}.$$

Proposition 5.3.4.2. *Supposons $n = 1$ ou bien que i et j sont des entiers strictement positifs tels que $i + j \leq q$, $i \leq q - p^{n-1}$ et $j \leq q - p^{n-1}$ et vérifiant l'une des conditions ci-dessus ; alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = c_{i,j} v(-i'', -j'')$, où*

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= -\sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-1-i_{n-1}} \rho_{ij}(l) \frac{l + i_{n-1}}{1 + i_{n-1} + j_{n-1}} \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= \sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}} \rho_{ij}(l) \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= \sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-1-i_{n-1}} \rho_{ij}(l) \frac{l + i_{n-1}}{l - j_{n-1}} + (-1)^{i_{n-1}} \frac{\binom{p}{j_{n-1}}}{p} \quad \text{si } n \geq 2\ ,\ i \not\equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1}) \\
&= -\sum_{l=j_{n-1}+1}^{p-i_{n-1}} \rho_{ij}(l) \frac{i_{n-1} + j_{n-1}}{l - j_{n-1}} + (-1)^{i_{n-1}} \frac{\binom{p}{j_{n-1}}}{p} \quad \text{si } n = 1 \text{ ou } (i \equiv 0\ (p^{n-1}) \text{ et } j \equiv 0\ (p^{n-1})).
\end{aligned}$$

Les entiers i'' et j'' sont les entiers introduits dans la proposition 5.3.3.2.

Démonstration. Par le point iv) du lemme précédent (5.3.4.1), sous les hypothèses de la proposition et si de plus $(r_1+1)(q-1) - a - p(j-1) < b$, alors

$$\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = (-1)^{a+r_1+1} \sum_{l=r_1+1}^{\min(p-1, a+r_1+1)} \frac{\binom{p}{l}}{p} \tbinom{a}{l-r_1-1} v(-s, -t),$$

où $s = q(p - a - r_1 - 1) - pi + r_1 + 1$ et $t = (r_1+1)(q-1) - a - p(j-1)$.

Il suffit ensuite d'étudier tous les cas et d'utiliser les lemmes préliminaires 5.3.2.1 et 5.3.2.2 pour obtenir $s = i''$, $t = j''$ et les formules énoncées. □

Lemme 5.3.4.3. *Sous les conditions de (iii) du lemme 5.3.4.1 ci-dessus, lorsque $r_1 \neq 0$ et $a \neq 0$, posons*

$$\begin{aligned}
h_U &= \sum_{l=1}^{r_1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)} \\
&\quad + \sum_{l=r_1+1}^{a+r_1} (-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} \sum_{r=l-r_1}^{a} (-1)^{a-r} \tbinom{a}{r} u_2^b u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)};
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} dh_U &= u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)}du_2 \\ &\quad + (-1)^{a+r_1}\left(\tbinom{p-1}{r_1-1} + r_1\sum_{r=1}^{a}\frac{\binom{p}{r_1+r}}{p}\tbinom{a}{r}\right)u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)}u_2^{b-1}du_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $a + r_1 = s$;

$$\begin{aligned} dh_U = &\sum_{l=1}^{r_1}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}lu_2^{p(q-i-j+1)}u_1^{p(j-1)-l(q-1)-1}du_1 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\sum_{r=l-r_1}^{a}(-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}bu_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)}du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\sum_{r=l-r_1}^{a}(-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}(a+l-r)u_2^{b}u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)-1}du_1 \end{aligned}$$

Comme $du_1 = -u_2^q du_2$ modulo p

$$\begin{aligned} dh_U = &-\sum_{l=1}^{r_1}(-1)^l\tbinom{p-1}{l-1}u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)-l(q-1)}(u_1^{q-1}-1)du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\sum_{r=l-r_1}^{a}(-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}(b+a+l-r)u_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)}du_2 \\ &- \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\sum_{r=l-r_1}^{a}(-1)^{a-r}\tbinom{a}{r}(a+l-r)u_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)-(l-r-1)(q-1)}du_2 \end{aligned}$$

Rappelons que $b + a = p\alpha - qa$ est nul modulo p ;

$$\begin{aligned} dh_U = &\left(u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)} + (-1)^{r_1}\tbinom{p-1}{r_1-1}u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)-r_1(q-1)}\right)du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\left(\sum_{r=l-r_1+1}^{a}(-1)^{a-r}l\tbinom{a+1}{r}u_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)}\right)u_2^{b-1}du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}(-1)^{s-l}\tbinom{a}{l-r_1}r_1u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)}u_2^{b-1}du_2 \\ &- \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}lu_1^{a+p(j-1)-(l-a-1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2 \\ = &\left(u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)} + (-1)^{r_1}\tbinom{p-1}{r_1-1}(u_1^{q-1}-1)^a u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)}u_2^{b-1}\right)du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1}^{s}\frac{\binom{p}{l}}{p}(-1)^s\tbinom{a}{l-r_1}r_1u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)}u_2^{b-1}du_2 \\ &- \sum_{l=r_1+1}^{s}(-1)^l\tbinom{p-1}{l-1}u_1^{a+p(j-1)-(l-a-1)(q-1)}u_2^{b-1}du_2 \\ &+ \sum_{l=r_1+1-a}^{r_1-1}\sum_{r=r_1+1-l}^{a}(-1)^{l+a}\tbinom{p-1}{l+r-1}\tbinom{a+1}{r}u_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)-l(q-1)}du_2. \end{aligned}$$

Ce calcul détaillé est valable lorsque $a \geq 2$. On calcule ensuite les coefficients de $u_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)-l(q-1)}du_2$ pour $r_1 - a \leq l \leq r_1$.

- pour $l = r_1$, ce coefficient est

$$(-1)^s\binom{p-1}{r_1-1} + (-1)^s \sum_{l=r_1+1}^{s} r_1 \frac{\binom{p}{l}}{p}\binom{a}{l-r_1},$$

ce qui nous donne le résultat.

- pour $l = r_1 - a$, ce coefficient est $(-1)^{r_1}\binom{p-1}{r_1-1} - (-1)^{r_1+1}\binom{p-1}{r_1} = 0$ modulo p.
- pour l compris entre $r_1 - a + 1$ et $r_1 - 1$, il vaut

$$(-1)^{a+l}\binom{p-1}{r_1-1}\binom{a}{r_1-l} + (-1)^{a+l}\binom{p-1}{l+a} + (-1)^{a+l}\sum_{r=r_1+1-l}^{a}\binom{p-1}{l+r-1}\binom{a+1}{r}.$$

On constate que pour $r_1 + 1 - a \leq r \leq a$:

$$\binom{p-1}{l+r}\binom{a}{r} + \binom{p-1}{l+r-1}\binom{a+1}{r} = \binom{p-1}{l+r-1}\binom{a}{r-1}$$

ce qui permet de montrer l'égalité

$$\binom{p-1}{l+a} + \sum_{r=r_1+1-l}^{a}\binom{p-1}{l+r-1}\binom{a+1}{r} = \binom{p-1}{r_1}\binom{a}{r_1-l}$$

et d'en déduire que le coefficient est nul. □

Remarques

i) Si $a = 0$, on pose $h_U = \sum_{l=1}^{r_1}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}u_2^{p(q-i-j+1)}u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ et l'on obtient

$$dh_U = u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)}du_2 + (-1)^{a+r_1}\binom{p-1}{r_1-1}u_2^{b-1}u_1^{p(j-1)-r_1(q-1)}du_2.$$

ii) Si $r_1 = 0$, on pose $h_U = \sum_{l=1}^{a}(-1)^l\frac{\binom{p}{l}}{p}\sum_{r=l}^{a}(-1)^{a-r}\binom{a}{r}u_2^bu_1^{a+p(j-1)-(l-r)(q-1)}$ et l'on obtient

$$dh_U = u_2^{p(q-i-j+1)-1}u_1^{p(j-1)}du_2 - (-1)^a u_2^{b-1}u_1^{a+p(j-1)}du_2.$$

Proposition 5.3.4.4. *Soit i et j des entiers strictement positifs tels que $i + j \leq q$.*

i *Si $j \geq q - p^{n-1} + 1$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = v(p(i-1)+1, pj - q(p-1))$.*

ii *Si $i \geq q - p^{n-1} + 1$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = v(pi - q(p-1), p(j-1)+1)$.*

iii *Supposons $i \leq q - p^{n-1}$, $j \leq q - p^{n-1}$, $i \not\equiv 0\ (p^{n-1})$, $j \not\equiv 0\ (p^{n-1})$; si de plus $i+j$ vérifie soit $i + j \equiv 0\ (p^{n-1})$, soit $i_{n-1} + j_{n-1} = (i+j)_{n-1}$, alors $\bar{\Phi}_M(v(i,j)) = c_{ij}v(i',j')$ où*

$$i' = \sum_{l=0}^{n-2} i_l p^{l+1} - j_{n-1}$$

$$j' = \sum_{l=0}^{n-2} j_l p^{l+1} - i_{n-1}$$

et

$$c_{ij} = (-1)^{i_{n-1}+1}(\binom{p-1}{j_{n-1}-1} + j_{n-1} \sum_{r=1}^{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}} \frac{\binom{p}{j_{n-1}+r}}{p} \binom{p-1-i_{n-1}-j_{n-1}}{r}) \; si \; p^{n-1} < j$$

$$= (-1)^{i_{n-1}} \; sinon \; .$$

Démonstration. (i) Supposons $j \geq q - p^{n-1} + 1$; alors par le lemme 5.3.4.1, $\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ est une fonction h_U définie sur l'ouvert U. On en déduit que l'image de $v(i,j)$ est aussi représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2, 0),$$

d'où le résultat.

(ii) Supposons $i \geq q - p^{n-1} + 1$; alors alors par le lemme 5.3.4.1, $\sum_{l=1}^{p-1}(-1)^l \frac{\binom{p}{l}}{p} u_2^{p(q-i-j+1)} u_1^{p(j-1)-l(q-1)}$ est une fonction h_V définie sur l'ouvert V. On en déduit que l'image de $v(i,j)$ est aussi représentée par le triplet

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2 - dh_V, 0),$$

d'où le résultat.

(iii) Sous ces hypothèses, $a = p-1-i_{n-1}-j_{n-1}$ et $r_1 = j_{n-1}$. Rappelons que $\bar{\Phi}_M(v(i,j))$ est représenté par

$$(-u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U, v_1^{p(i-1)} v_2^{p(q-i-j)} v_2^{p-1} dv_2 - dh_V, 0) + (-dh_U, dh_V, h_{ij}).$$

L'hypothèse $p^{n-1} < j$ implique que $r_1 \neq 0$. Le lemme 5.3.4.3 permet de conclure que

$$\begin{aligned} & - u_1^{p(j-1)} u_2^{p(q-i-j)} u_2^{p-1} du_2 + dh_U \\ =& (-1)^{a+r_1} (\binom{p-1}{r_1-1} + r_1 \sum_{r=1}^{a} \frac{\binom{p}{r_1+r}}{p} \binom{a}{r}) u_1^{a+p(j-1)-r_1(q-1)} u_2^{b-1} du_2. \end{aligned}$$

Une analyse des différentes situations possibles conduit à la proposition. □

Les calculs montrent que la situation est beaucoup plus simple si $n = 1$.

Corollaire 5.3.5. *Supposons $q = p$; les familles $(v(i,j))_{\substack{1 \leq i,\ 1 \leq j \\ i+j \leq q}}$ et $(v(-i,-j))_{\substack{1 \leq i,\ 1 \leq j \\ i+j \leq q}}$ sont échangées par Φ_M. En particulier, la courbe ne peut pas être ordinaire.*

5.4 (φ, Γ)-module associé

5.4.1 Rappels sur les (φ, Γ)-modules Notons $K = \operatorname{Frac} W$ et considérons la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique K_∞ de K contenue dans $\bar{K}$; soit Γ le groupe de Galois de K_∞/K, qui est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, et choisissons-en un générateur topologique, noté γ. On munit l'anneau $S = W[[T]]$ d'une action de Γ telle que $\gamma(T) - T = \alpha(p+T)T$, où α est une unité de S, qui est congrue à une unité de $\mathbf{Z}_p$ modulo T et à 1 modulo (p, T). Dans ces conditions, il existe une unique action de Frobenius, notée φ, commutant à l'action de Γ, compatible avec le Frobenius sur W, qui relève l'élévation à la puissance p modulo p et telle que $\varphi(T) = u(p+T)^{p-1}T$, où $u \equiv 1$ modulo pS (pour un exposé détaillé des propriétés de S, voir [Fon90], 3.2, [Fon94], ou [Wac97], 3.1.1.).

Un (φ, Γ)-module sur S est un S-module de type fini muni d'actions de φ et de Γ, semi-linéaires par rapport aux actions respectives sur S et commutant entre elles.

On peut associer à une courbe projective et lisse X sur W un (φ, Γ)-module de la façon suivante. On dispose du Frobenius divisé

$$\Phi_M^\tau : H^1_{DR}(X') \to H^1_{DR}(X),$$

associé à une section τ de la suite exacte 10.

Choisissons $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ une base de $H^1_{DR}(X)$ adaptée à la filtration de Hodge, c'est-à-dire telle que $(\bar{e}_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ soit une base de $\mathrm{Gr}\, H^1_{DR}(X)$, et notons r_i le plus grand entier tel que $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i} H^1_{DR}(X)$. La base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ est également une base de $H^1_{DR}(X')$ et le fait que Φ_M^τ soit un isomorphisme implique que la matrice $A = (a_{ij})$, exprimant Φ_M^τ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2g}$, est inversible.

On définit alors sur le module $N = S \otimes_W H^1_{DR}(X)$ une action de φ par

$$\varphi(1 \otimes e_j) = (p+T)^{r_j} \sum_{i=1}^{2g} a_{ij} 1 \otimes e_i,$$

l'action de Γ sur N étant induite par la proposition suivante (cf [Wac97], 3.1.4, théorème 3) :

Proposition 5.4.1.1. *Il existe sur N une unique action de Γ commutant à φ et triviale modulo T.*

5.4.2 Application à la courbe de Drinfeld La courbe C est une courbe de genre $g = \frac{q(q-1)}{2}$. La base $(v(i,j), v(-i,-j))_{\substack{1 \leq i,\ 1 \leq j \\ i+j \leq q}}$ de $H^1_{DR}(C_W)$ est une base adaptée à la filtration où $v(i,j) \in \mathrm{Fil}^1 H^1_{DR}(C_W)$.

Notons $e_{q(q-1)+i-qj} = v(i,j)$ (respectivement $e_{-i+qj+1} = v(-i,-j)$). On sait que l'endomorphisme de Frobenius agit sur la base $(v(i,j), v(-i,-j))_{1 \leq i, 1 \leq j, i+j \leq q}$ en permutant les vecteurs, à un scalaire près (cf [HJ90]). Il existe une permutation s de l'ensemble des entiers compris entre 1 et $q(q-1)$ et des éléments a_l de W tels que pour l compris entre 1 et $q(q-1)$, notons $\Phi_M(e_l) = a_l e_{s(l)}$. Par abus de notation, on désigne $1 \otimes e_i$ dans N par e_i.

Proposition 5.4.2.1. *Chaque vecteur e_l pour $1 \leq l \leq q(q-1)$ est un vecteur propre sous l'action de Γ.*

Démonstration. La démonstration se fait par dévissage, comme celle de la proposition 5.4.1.1.

Modulo T, on sait que $\gamma(e_l) \equiv e_l$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 tel qu'il existe pour tout l compris entre 1 et $q(q-1)$, un élément ρ_l de $W[[T]]$, $\rho_l \equiv 1$ modulo T, tels que

$$\varphi(\rho_l) a_l (p+T)^{r_l} - a_l \gamma(p+T)^{r_l} \rho_{s(l)} \equiv 0 \text{ modulo } T^n (p+T)^{r_l}.$$

Considérons alors $\beta_l \in S$ tel que

$$\varphi(\rho_l) a_l (p+T)^{r_l} - a_l \gamma(p+T)^{r_l} \rho_{s(l)} = T^n (p+T)^{r_l} \beta_l.$$

On recherche des éléments x_l de S tels que

$$T^n (p+T)^{r_l} \beta_l + \varphi(T^n) \varphi(x_l) a_l (p+T)^{r_l} - a_l \gamma(p+T)^{r_l} T^n x_{s(l)} \equiv 0 \text{ modulo } T^{n+1} (p+T)^{r_l}$$

et l'on est ramené à résoudre l'équation

$$\beta_l = a_l x_{s(l)} - u^n p^{n(p-1)} a_l \varphi(x_l).$$

Un dévissage modulo p permet alors de montrer qu'il existe un unique $q(q-1)$-uplet (x_l) d'éléments de W solution. En particulier, il vient $x_{s(l)} = a_l^{-1} \beta_l$ modulo p. □

Dans la section précédente, les coefficients a_l ont été déterminés modulo p. On en déduit la matrice de γ modulo p. Le procédé de calcul étant algorithmique, on peut obtenir les coefficients de l'action de γ modulo p lorsqu'une précision T^m est fixée.

Références

[Ber74] Pierre Berthelot. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[BO78] Pierre Berthelot and Arthur Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1978.

[Bre98] Christophe Breuil. Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable. *Duke Math. J.*, 95(3) :523–620, 1998.

[Del68] P. Deligne. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (35) :259–278, 1968.

[DI87] Pierre Deligne and Luc Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Invent. Math.*, 89(2) :247–270, 1987.

[FM87] Jean-Marc Fontaine and William Messing. p-adic periods and p-adic étale cohomology. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Fon90] Jean-Marc Fontaine. Représentations p-adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon94] Jean-Marc Fontaine. Le corps des périodes p-adiques. *Astérisque*, (223) :59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[HJ90] Burkhard Haastert and Jens Carsten Jantzen. Filtrations of the discrete series of $\mathrm{SL}_2(q)$ via crystalline cohomology. *J. Algebra*, 132(1) :77–103, 1990.

[HW13] Christine Huyghe and Nathalie Wach. Représentations galoisiennes associées aux courbes hyperelliptiques. *preprint*, 2013.

[Ill96] Luc Illusie. Frobenius et dégénérescence de Hodge. In *Introduction à la théorie de Hodge*, volume 3 of *Panor. Synthèses*, pages 113–168. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[Ked01] Kiran S. Kedlaya. Counting points on hyperelliptic curves using Monsky-Washnitzer cohomology. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 16(4) :323–338, 2001.

[Maz73] B. Mazur. Frobenius and the Hodge filtration (estimates). *Ann. of Math. (2)*, 98 :58–95, 1973.

[Wac97] Nathalie Wach. Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2) :185–240, 1997.

Christine Huyghe
IRMA, Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex FRANCE
mél huyghe@math.unistra.fr
http ://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe

Nathalie Wach
IRMA, Université de Strasbourg

7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex FRANCE
mél wach@math.unistra.fr
http ://www-irma.u-strasbg.fr/˜wach